Problema 729

C. 1.271. Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

Komal (2015): Enero.

Sea un semicírculo Ω de centro O(0,0) y radio 1.

Sean B(-1,0) , C(1,0), A(a, $\sqrt{1-a^2}$) los vértices del triángulo rectángulo genérico a considerar.

Su área es $[ABC] = \frac{2\sqrt{1-a^2}}{2} = \sqrt{1-a^2}$.

La recta r que contiene a BA es $\frac{y-\sqrt{1-a^2}}{-\sqrt{1-a^2}} = \frac{x-a}{-1-a}$

Para obtener la recta s paralela a r tangente a Ω debemos considerar la intersección de la perpendicular a r por O(0,0) $y = -\frac{1+a}{\sqrt{1-a^2}}x$ con Ω, $x^2 + y^2 = 1$

El punto de tangencia es, pues, $U\left(-\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}}\right)$

Así la recta s que contiene al nuevo cateto es:

$$y - \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{1-a^2}}{1+a}(x + \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}})$$

Y el punto de corte con el eje es $U\left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{1-a}}, 0\right)$

Por consideraciones análogas se puede obtener que la recta paralela a CA tangente a Ω es:

$$y - \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{1-a^2}}{1-a}(x - \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{2}})$$

Y el punto de corte con el eje es $V\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+a}}, 0\right)$

Dado que $UV = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a})}{\sqrt{1-a^2}}$ es la nueva hipotenusa, la razón de la misma con BC=2 habrá de ser $\sqrt{6}$.

De tal razón, obtenemos:

$$\frac{\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right)}{\sqrt{1-a^2}}}{2} = \sqrt{6} \to \sqrt{2}\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{1-a}\right) = \sqrt{24}\sqrt{1-a^2}$$

Operando y simplificando se tiene:

$$36a^4 - 59a^2 + 24 = 0 \rightarrow (4a^2 - 3)(9\,a^2 - 8) = 0.$$

Así surgen cuatro valores que la resuelven:

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, a = \frac{2\sqrt{2}}{3}, a = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Llevadas estas soluciones al problema principal se observa que las dos primeras son válidas pero las dos últimas no, pues dan lugar a que el triángulo nuevo sea 12 veces el inicial.

Así $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ y $A'\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Son los puntos sobre la semicircunferencia que verifican lo pedido.

Luego en ambos casos el ángulo central $\angle AOC = 30º$

Así $\angle ABC = 15º, < ACB = 75º$

Los triángulos que cumplen lo pedido son:

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), C(-1{,}0), B(1{,}0)\ y$$

$$U\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}, 0\right) = U\left(-2\sqrt{2+\sqrt{3}}, 0\right) = U(-3.8637{,}0),$$

$$V\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}}, 0\right) = V\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}, 0\right) = V(1.0353{,}0)$$

Para hallar el tercer vértice del nuevo triángulo tracemos las rectas específicas con los valores encontrados de a.

Recta que contiene a $U\left(-2\sqrt{2+\sqrt{3}}, 0\right)$y es paralela a BA, con pendiente$\frac{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 - \sqrt{3}$

$$y = (2 - \sqrt{3})(x + 2\sqrt{2+\sqrt{3}})$$

Recta que contiene a $V(2\sqrt{2-\sqrt{3}}, 0)$ y es paralela a CA, con pendiente $-\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -2 - \sqrt{3}$

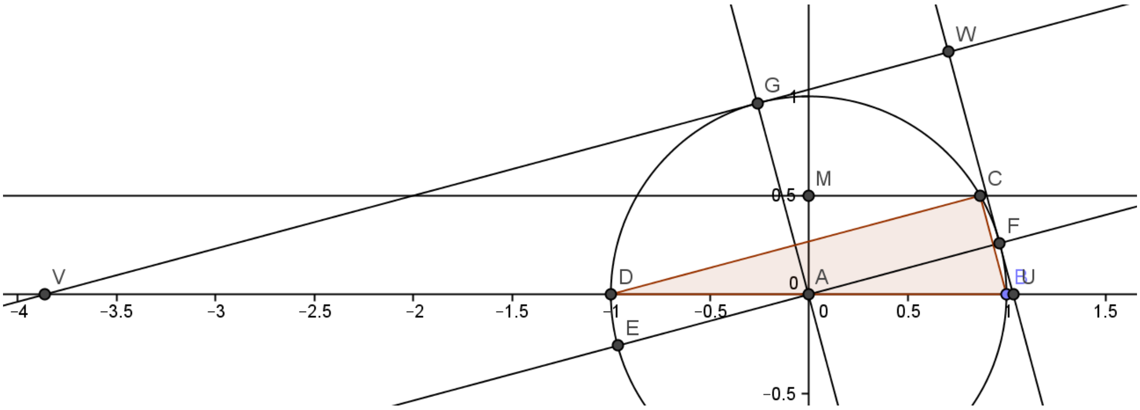
$$y = (-2 - \sqrt{3})(x - 2\sqrt{2-\sqrt{3}})$$

Resolviendo ambas ecuaciones obtenemos:

$$x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}(4+2\sqrt{3}) - \sqrt{2+\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})}{4} = 0.7071$$

$$y = (-2-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}(4+2\sqrt{3}) - \sqrt{2+\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})}{4} - 2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right) = 1.2247$$

Así el triángulo es a $U(-3.8637,0)$, $V(1.0353,0)$, W(0.7071, 1.2247)



Para el caso $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obtendría el simétrico respecto a OY.

Ricardo Barroso Campos

Director