

Problema 729

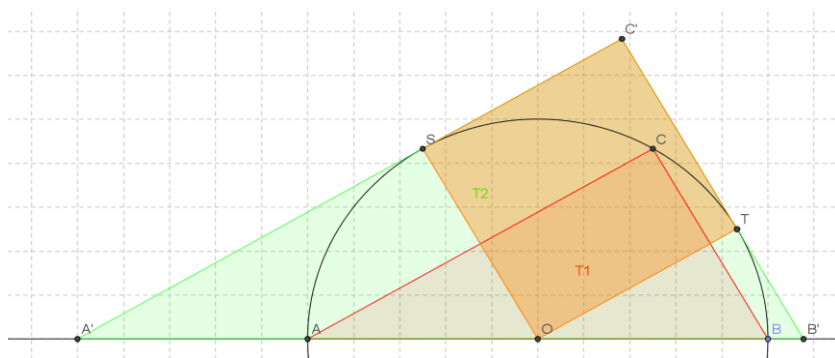
- C. 1.271. Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

[Komal](#) (2015): Enero. (Basado sobre una idea de [I. Légrádi](#), Sopron)

Solución de Manuel Gándara Pastrana, profesor interino en IES Fernando Blanco en Cee, A Coruña.

Se puede suponer que la circunferencia es de radio 1, basta tomar unidad de medida su radio.

El triángulo mayor $A'B'C'$ se puede dividir en un cuadrado $OTC'S$ de área 1 y los triángulos rectángulos $A'OS$ y $OB'T$ que son semejantes a ABC y $A'B'C'$.



Sea α el ángulo correspondiente a A' , A y O en los triángulos $A'OS$, ABC y $OB'T$ respectivamente.

En AOS se tiene $\tan \alpha = \frac{\overline{OS}}{\overline{A'S}} = \frac{1}{\overline{A'S}}$, luego $\overline{A'S} = \frac{1}{\tan \alpha}$. Área de $AOS = \frac{1}{2 \tan \alpha}$

En $OB'T$ se tiene $\tan \alpha = \frac{\overline{TB'}}{\overline{TO}} = \overline{TB'}$. Área de $OB'T = \frac{\tan \alpha}{2}$

Luego Área $A'B'C' = 1 + \frac{1}{2 \tan \alpha} + \frac{\tan \alpha}{2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tan \alpha} + \tan \alpha \right) = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha} = 1 + \frac{1}{\sin 2\alpha}$

Por otra parte en ABC los catetos son $\overline{AB} \cos \alpha = 2 \cos \alpha$ y $\overline{AB} \sin \alpha = 2 \sin \alpha$

Área $ABC = \frac{2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha}{2} = \sin 2\alpha$

El ángulo α varía entre 0 y 90 grados para estos triángulos. Luego $\sin 2\alpha \geq 0$.

El problema pide los ángulos del triángulo ABC para que Área $A'B'C' = 6 \cdot$ Área ABC

Que es lo mismo que encontrar α para que se cumpla $1 + \frac{1}{\sin 2\alpha} = 6 \cdot \sin 2\alpha$

Resolviendo la ecuación da soluciones $-\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ para $\sin 2\alpha$. Como este seno no es negativo, tiene que ser $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$. Por tanto $2\alpha = 30^\circ$ y $\alpha = 15^\circ$

El triángulo rectángulo tiene ángulos agudos de 15° y de 75° .