

Problema 729

Considerem la circumferència circumscripta a un triangle rectangle.

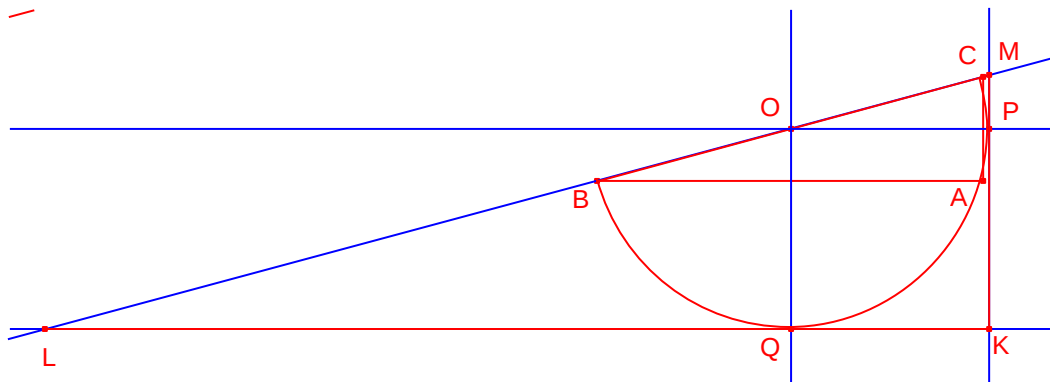
Sobre la semicircumferència que conté el triangle dibuixem les rectes tangents paral·leles als catets.

Les dues tangents i la recta que conté la hipotenusa formen un triangle semblant a l'inicial.

Si l'àrea del triangle exterior és 6 vegades més gran que l'àrea del triangle interior, determineu els angles del triangle.

KöMaL C1271 gener 2015.

Solució de Ricard Peiró:



Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$.

Siga O el circumcentre del triangle $\triangle ABC$, O és el punt mig de la hipotenusa.

El radi de la circumferència circumscripta és $\overline{OA} = \frac{a}{2}$.

Siga P el punt de tangència de la recta tangent a la semicircumferència paral·lela al catet $\overline{AC}$. Siga Q el punt de tangència de la recta tangent a la semicircumferència paral·lela al catet $\overline{AB}$.

Les dues rectes tangents i la recta que conté la hipotenusa forma el triangle $\triangle KLM$ semblant al triangle $\triangle ABC$.

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \frac{a}{2}. \quad \overline{KP} = \overline{KQ} = \frac{a}{2}.$$

Els triangles rectangles $\triangle ABC$, $\triangle POM$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PM}}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{c}. \text{ Aleshores, } \overline{PM} = \frac{a}{2} \frac{b}{c}.$$

$$\overline{KM} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \frac{b}{c} = \frac{a}{2c} (b+c). \text{ Anàlogament, } \overline{KL} = \frac{a}{2b} (b+c).$$

L'àrea del triangle $\triangle KLM$ és 6 vegades l'àrea del triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{\frac{a}{2c} (b+c) \cdot \frac{a}{2b} (b+c)}{2} = 6 \left(\frac{bc}{2} \right). \text{ Simplificant:}$$

$$a^2 (b+c)^2 = 24b^2c^2. \text{ Dividint l'expressió per } a^4.$$

$$(\sin B + \cos B)^2 = 24 \sin^2 B \cdot \cos^2 B.$$

$$1 + 2 \sin B \cdot \cos B = 6(2 \sin B \cdot \cos B)^2.$$

$$1 + \sin 2B = 6 \sin^2 2B. \text{ Resolent l'equació:}$$

$$\sin 2B = \frac{1}{2}. \quad 2B = 30^\circ, 150^\circ.$$

$$\text{Aleshores, } B = 15^\circ, \text{ o } B = 75^\circ.$$

Aleshores, els angles del triangle $\triangle ABC$ són $A = 90^\circ, B = 15^\circ, C = 75^\circ$, o bé $A = 90^\circ, B = 75^\circ, C = 15^\circ$.