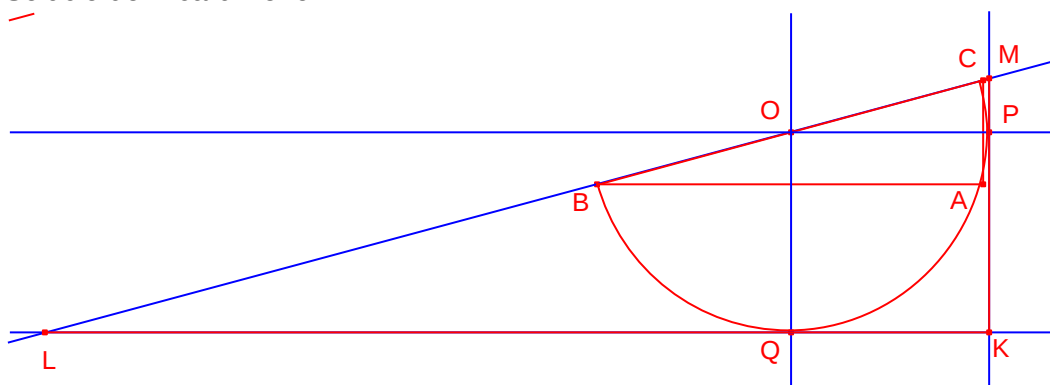


Problema 729

Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

KöMaL C1271 Enero 2015.

Solució de Ricard Peiró:



Sea el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $\angle A = 90^\circ$.

Sea O el circuncentro del triángulo $\triangle ABC$, O es el punto medio de la hipotenusa.

El radio de la circunferencia circunscrita es $\overline{OA} = \frac{a}{2}$.

Sea P el punto de tangencia de la recta tangente a la semicircunferencia paralela al cateto $\overline{AC}$. Sea Q el punto de tangencia de la recta tangente a la semicircunferencia paralela al cateto $\overline{AB}$.

Las dos rectas tangentes y la recta que contiene la hipotenusa forma el triángulo $\triangle KLM$ semejante al triángulo $\triangle ABC$.

$$\overline{OP} = \overline{OQ} = \frac{a}{2}. \quad \overline{KP} = \overline{KQ} = \frac{a}{2}.$$

Los triángulos rectángulos $\triangle ABC$, $\triangle POM$ son semejantes. Aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PM}}{\frac{a}{2}} = \frac{b}{c}. \text{ Entonces, } \overline{PM} = \frac{a}{2} \frac{b}{c}.$$

$$\overline{KM} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \frac{b}{c} = \frac{a}{2c} (b+c). \text{ Análogamente, } \overline{KL} = \frac{a}{2b} (b+c).$$

El área del triángulo $\triangle KLM$ es 6 veces el área del triángulo $\triangle ABC$:

$$\frac{\frac{a}{2c} (b+c) \cdot \frac{a}{2b} (b+c)}{2} = 6 \left(\frac{bc}{2} \right). \text{ Simplificando:}$$

$$a^2 (b+c)^2 = 24b^2 c^2. \text{ Dividiendo la expresión por } a^4.$$

$$(\sin B + \cos B)^2 = 24 \sin^2 B \cdot \cos^2 B.$$

$$1 + 2 \sin B \cdot \cos B = 6(2 \sin B \cdot \cos B)^2.$$

$1 + \sin 2B = 6 \sin^2 2B$. Resolviendo la ecuación:

$$\sin 2B = \frac{1}{2}. \quad 2B = 30^\circ, 150^\circ.$$

Entonces, $B = 15^\circ$, o $B = 75^\circ$.

Entonces, los ángulos del triángulo $\triangle ABC$ son $A = 90^\circ, B = 15^\circ, C = 75^\circ$, o bien $A = 90^\circ, B = 75^\circ, C = 15^\circ$.