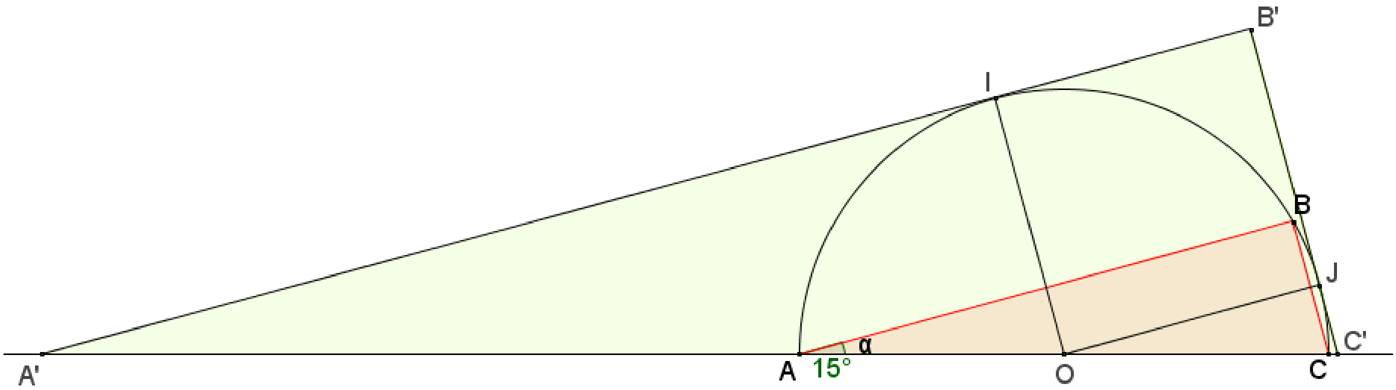
Problema 729

Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo, y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Soit un triangle ABC dont B est le sommet de l'angle droit. On pose α = angle(BAC) et on désigne par I et J les points de tangence au cercle circonscrit au triangle ABC des droites parallèles aux côtés BA et BC .Ces tangentes déterminent un triangle A'B'C' homothétique au triangle ABC. Le rapport des aires des triangles A'B'C' et ABC est mesuré par le carré du rapport des côtés B'C' et BC.

Par hypothèse : aire(A'B'C')/aire(ABC) = 6 = $(B'C'/BC)^2$.

Si on prend ,par convention, OI = OJ = 1, il en résulte BC = $2\sin(\alpha)$ et B'C' = B'J + JC' = 1 + $\tan(\alpha)$. D'où $((1+\tan(\alpha))/2\sin(\alpha))^2 = 6$ ou encore $1 \sin(2\alpha) = 6\sin^2(2\alpha)$,l'équation du second degré $6X^2 - X - 1 = 0$ avec $X = \sin(2\alpha)$ qui a pour racine unique racine positive $X = 1/2$.

D'où $2\alpha = \pi/6$ et $\boldsymbol{\alpha = \pi/12 = 15°}$