

Problema 729.- Consideremos el círculo circunscrito a un triángulo rectángulo. Dibujemos el semicírculo conteniendo al triángulo y tracemos las tangentes paralelas a los catetos. Tales paralelas junto a la recta que contiene a la hipotenusa, construyen un triángulo rectángulo semejante al original. Hallar los ángulos del triángulo si el área del mayor es 6 veces el área del menor.

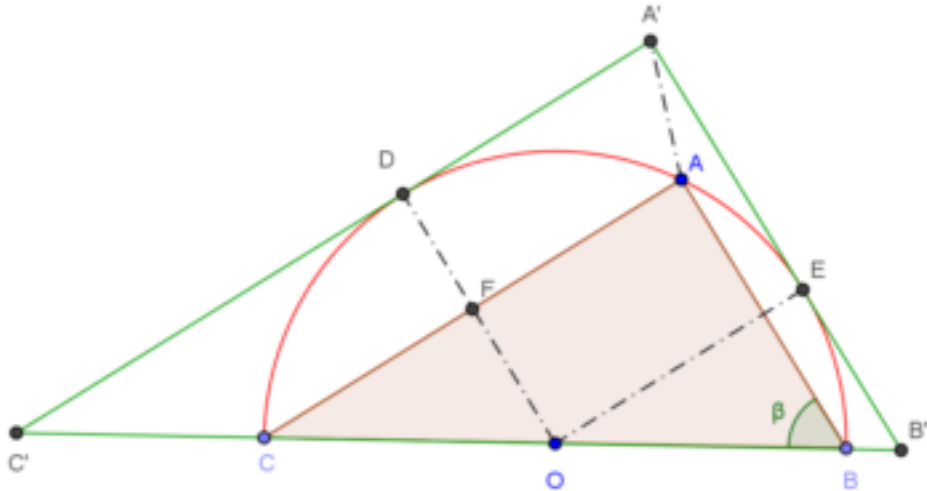
[Komal](#) (2015): Enero. (Basado sobre una idea de [I. Légrádi](#), Sopron)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Sean $\alpha = 90^\circ, \beta$ y γ los ángulos del triángulo ABC y R el radio de la circunferencia circunscrita. Los catetos, expresados en función de estas variables, son $b = 2R\text{sen } \beta$; $c = 2R\cos \beta$.

En la figura $OF = R \cdot \cos\beta$, por tanto FD , altura del trapecio $A'ACC'$, mide $R \cdot (1 - \cos\beta)$.

Análogamente, la altura del trapecio $A'ABB'$ es $R \cdot (1 - \cos\gamma) = R \cdot (1 - \text{sen } \beta)$.



De los datos del enunciado deducimos que la razón de semejanza de ABC a $A'B'C'$ es $\sqrt{6}$.

El área del triángulo ABC es $\frac{bc}{2} = 2 \cdot R^2 \cdot \text{sen } \beta \cos \beta$.

El área del trapecio $A'ACC'$ es $\frac{\sqrt{6}+1}{2} Rb(1 - \cos\beta) = (\sqrt{6} + 1)R^2\text{sen } \beta(1 - \cos\beta)$; la del trapecio $A'ABB'$ $(\sqrt{6} + 1)R^2 \cos\beta (1 - \text{sen } \beta)$.

La suma de esas dos áreas ha de ser cinco veces el área del triángulo ABC

$$\begin{aligned} &(\sqrt{6} + 1)R^2[\text{sen}\beta(1 - \cos\beta) + \cos\beta (1 - \text{sen } \beta)] \\ &= (\sqrt{6} + 1)R^2[\text{sen } \beta + \cos\beta - 2 \cdot \text{sen } \beta \cos \beta] = 10 \cdot R^2 \cdot \text{sen } \beta \cos \beta \end{aligned}$$

o bien,

$$\text{sen } \beta + \cos\beta - 2 \cdot \text{sen } \beta \cos \beta = 2(\sqrt{6} - 1) \cdot \text{sen } \beta \cos \beta ;$$

$\text{sen } \beta + \cos\beta = 2\sqrt{6} \cdot \text{sen } \beta \cos \beta \qquad (E)$

Elevando al cuadrado la expresión (E) se obtiene: $1 + 2 \cdot \text{sen } \beta \cdot \cos \beta = 24(\text{sen } \beta \cdot \cos \beta)^2$

Resolviendo en $x = 2\text{sen } \beta \cos \beta = \text{sen } 2\beta$, obtenemos $x = \frac{1}{2}$, (la solución negativa no tiene sentido) nos da $2\beta = 30^\circ, \beta = 15^\circ$ y por tanto $\gamma = 75^\circ$.

Si tomamos $2\beta = 150^\circ$ obtenemos el mismo triángulo ($\beta = 15^\circ$ y $\beta = 75^\circ$ también son soluciones de la ecuación (E)).