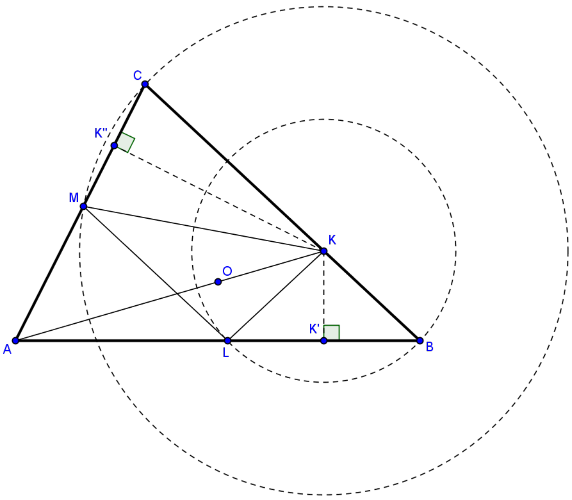
Solución al Problema 730
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de marzo de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Marzo 2, 2015

Problema 730. *Estonia (2004) Selección del equipo para la IMO.*
Problema 2. Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO con BC. Sobre los lados AB yAC, los puntos L y M son tales que $KL = KB$ y $KM = KC$. Demostrar que los segmentos LM y BC son paralelos.

Solución 730. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas la recta AO tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a^2S_A & b^2S_B & c^2S_C \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad AO \equiv c^2S_Cy - b^2S_Bz = 0$$

entonces $K = AO \cap BC = (0 : b^2S_B : c^2S_C)$.
La recta por K y perpendicular al lado AB es

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2S_B & c^2S_C \\ S_B & S_A & -c^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad KAB_{\infty\perp} \equiv (b^2c^2S_B + c^2S_AS_C)x - c^2S_BS_Cy + b^2S_B^2z = 0$$

entonces $K' = KAB_{\infty\perp} \cap AB = (S_BS_C : S^2 : 0)$ y L simétrico de B respecto a K' es

$$L = (2S_BS_C : a^2S_A : 0)$$

La recta por K y perpendicular al lado AC es

$$\begin{vmatrix} 0 & b^2S_B & c^2S_C \\ S_C & -b^2 & S_A \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad KAC_{\infty\perp} \equiv (b^2c^2S_C + b^2S_AS_B)x + c^2S_C^2y - b^2S_BS_Cz = 0$$

entonces $K'' = KAC_{\infty\perp} \cap AC = (S_BS_C : 0 : S^2)$ y M simétrico de C respecto a K'' es

$$M = (2S_BS_C : 0 : a^2S_A)$$

ahora la recta LM tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 2S_BS_C & a^2S_A & 0 \\ 2S_BS_C & 0 & a^2S_A \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad LM \equiv a^2S_Ax - 2S_BS_Cy - 2S_BS_Cz = 0$$

Así el punto del infinito de la recta LM es $LM_\infty(0 : -1 : 1)$, que es lo mismo punto del infinito del lado BC. Por tanto los segmentos LM y BC son paralelos, q.e.d.