

Problema 730.-

Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO con BC. Sobre los lados AB y AC, los puntos L y M son tales que $KL=KB$ y $KM=KC$. Demostrar que los segmentos LM y BC son paralelos.

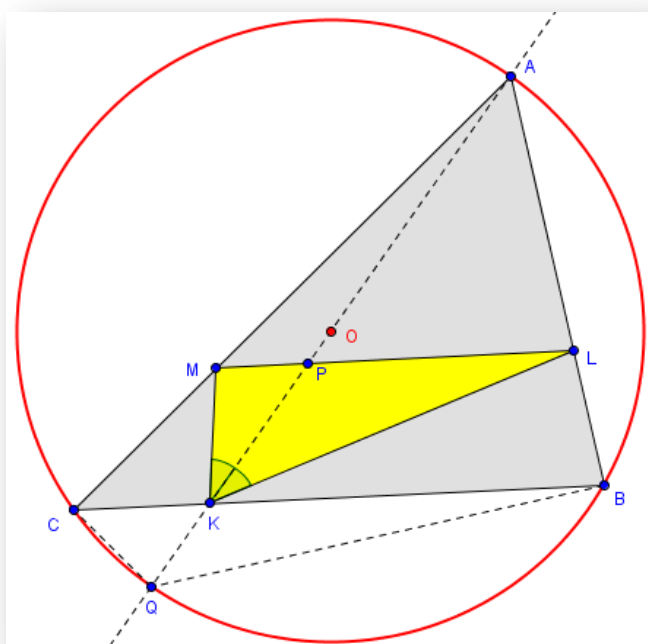
Estonia (2004) Selección del equipo para la IMO

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Si consideramos el triángulo KLM, observamos que la recta KA es bisectriz del ángulo en K.

En efecto, como sabemos el valor de los ángulos $\angle KAB = 90^\circ - C$ y $\angle ALK = 180^\circ - B$, entonces tenemos que $\angle AKL = 90^\circ - A$.

Como el valor de los ángulos $\angle KAC = 90^\circ - B$ y $\angle AMK = 180^\circ - C$, entonces obtenemos el valor de $\angle AKM = 90^\circ - A$.



En definitiva, KA es bisectriz del ángulo en K. Sea P el punto donde la bisectriz AK corta al lado LM.

Por el teorema de la Bisectriz, se verificará:

$$\frac{LP}{KL} = \frac{PM}{KM} \rightarrow \frac{LP}{BK} = \frac{PM}{KC} = \frac{LM}{BC}$$

Lo que significa que, en efecto, los segmentos LM y BC son paralelos.

cqd ■