Quincena del 1 al 15 de marzo de 2015

Problema 730

Problema 2. Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO con BC. Sobre los lados AB yAC, los puntos L y M son tales que KL=KB y KM=KC. Demostrar que los segmentos LM y BC son paralelos.

Estonia (2004) Selección del equipo para la IMO

Solución del director.

El triángulo AKL tiene: $\angle LAK = 90º - C, \angle ALK = 180º - B, < AKL = B + C - 90º$

El triángulo AKM tiene: $\angle MAK = 90º - B, \angle ALK = 180º - C, < AKL = B + C - 90º$

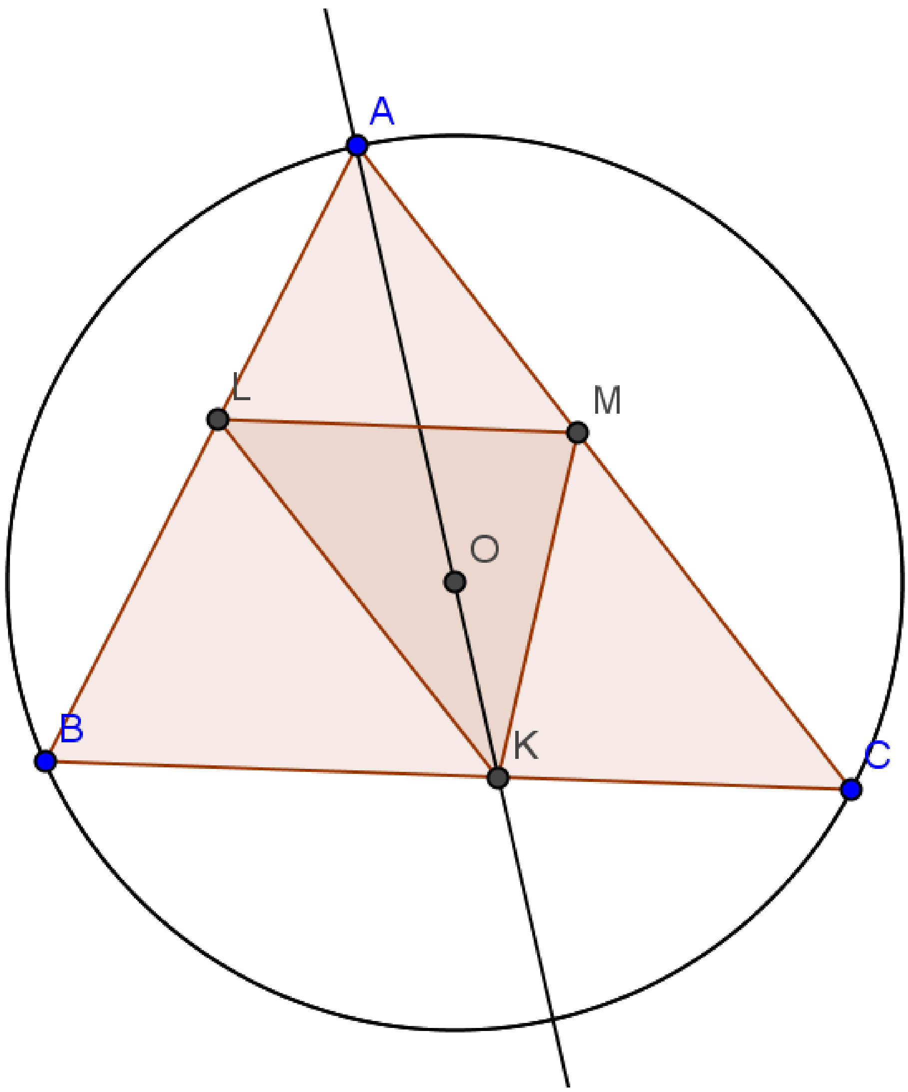
Ambos tienen en común AK

Así es

$$\frac{AL}{AK} = \frac{sen(B + C - 90º)}{sen\ (180º - B)}; \frac{AM}{AK} = \frac{sen(B + C - 90º)}{sen\ (180º - C)}$$

De donde: $\frac{AL}{AM} = \frac{sen\ (180º - C)}{sen(180º - B)} = \frac{sen\ C}{sen\ B} = \frac{AB}{AC}$

De esta manera LM es paralelo a BC.



Si el triángulo es rectángulo el segmento LM degenera en un punto. Y si el triángulo es obtusángulo permanece la propiedad.

Ricardo Barroso Campos.

Director de trianguloscabri

Jubilado. Sevilla