

Siga O el circumcentre del triangle acutangle $\triangle ABC$.

Siga K el punt d'intersecció de la recta AO i el costat $\overline{BC}$.

Sobre els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, els punts L i M són tals que $\overline{KL} = \overline{KB}$ i $\overline{KM} = \overline{KC}$.

Demostreu que els segments $\overline{LM}$ i $\overline{BC}$ són paral·lels.

Solució de Ricard Peiró:

$$\angle LKB = 180^\circ - 2B, \angle MKC = 180^\circ - 2C.$$

$$\angle AOB = 2C, \angle OAB = 90^\circ - C.$$

$$\angle AOC = 2B, \angle OAC = 90^\circ - B.$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CMK$:

$$\frac{\overline{CM}}{\sin 2C} = \frac{\overline{CK}}{\sin C} \quad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle LBK$:

$$\frac{\overline{BL}}{\sin 2B} = \frac{\overline{BK}}{\sin B} \quad (2)$$

Dividint les dues expressions:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} \frac{\sin B \sin 2C}{\sin C \sin 2B}. \quad (3)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABC$:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} \quad (4)$$

Aleshores:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{BL}} = \frac{b}{c} \frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} \frac{\sin 2C}{\sin 2B} \quad (5)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AKC$:

$$\frac{\overline{CK}}{\cos B} = \frac{\overline{AK}}{\sin C} \quad (6)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle AKB$:

$$\frac{\overline{BK}}{\cos C} = \frac{\overline{AK}}{\sin B} \quad (7)$$

Dividint les expressions (5) (6):

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} = \frac{\sin B \cdot \sin B}{\cos C \cdot \sin C} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \quad (8)$$

$$\text{Aleshores: } \frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} \frac{\sin 2C}{\sin 2B} = 1 \quad (9)$$

Substituint l'expressió (9) en l'expressió (5):

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{BL}} = \frac{b}{c}. \text{ Aplicant el teorema invers del teorema de Tales:}$$

els segments $\overline{LM}$ i $\overline{BC}$ són paral·lels.

