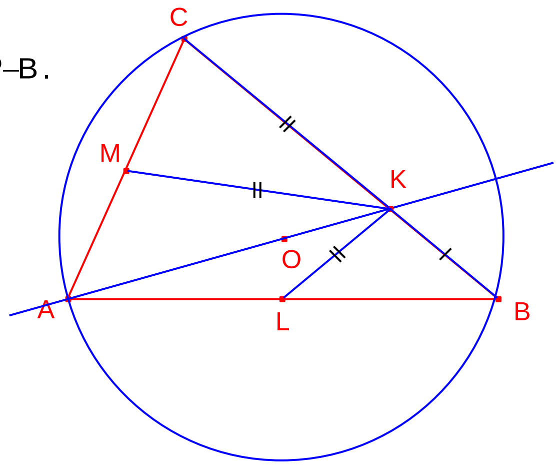
Problema 730

Problema 2. Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO con BC. Sobre los lados AB y AC, los puntos L y M son tales que KL=KB y KM=KC. Demostrar que los segmentos LM y BC son paralelos.

Estonia (2004) Selección del equipo para la IMO

Solución de Ricard Peiró:



$\angle LKB = 180^{\circ}-2B$, $\angle MKC = 180^{\circ}-2C$.

$\angle AOB = 2C$, $\angle OAB = 90^{\circ}-C$. $\angle AOC = 2B$, $\angle OAC = 90^{\circ}-B$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{CMK}$:

$$\frac{\overline{CM}}{\sin 2C} = \frac{\overline{CK}}{\sin C} \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{LBK}$:

$$\frac{\overline{BL}}{\sin 2B} = \frac{\overline{BK}}{\sin B} \qquad (2)$$

Dividiendo las dos expresiones:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{BL}} = \frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} \frac{\sin B}{\sin C} \frac{\sin 2C}{\sin 2B}. \qquad (3)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} \qquad (4)$$

Entonces:

$$\frac{\overline{CM}}{\overline{BL}} = \frac{b}{c} \frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} \frac{\sin 2C}{\sin 2B} \qquad (5)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AKC}$:

$$\frac{\overline{CK}}{\cos B} = \frac{\overline{AK}}{\sin C} \qquad (6)$$

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{AKB}$:

$$\frac{\overline{BK}}{\cos C} = \frac{\overline{AK}}{\sin B} \qquad (7)$$

Dividiendo las expresiones (5) (6):

$$\frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} = \frac{\sin B \cdot \sin B}{\cos C \cdot \sin C} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C} \qquad (8)$$

Entonces: $\frac{\overline{CK}}{\overline{BK}} \frac{\sin 2C}{\sin 2B} = 1$ (9)

Substituyendo la expresión (9) en la expresión (5):

$\frac{\overline{CM}}{\overline{BL}} = \frac{b}{c}$. Aplicando el teorema inverso del teorema de Tales:

Los segmentos $\overline{LM}$ y $\overline{BC}$ son paralelos.