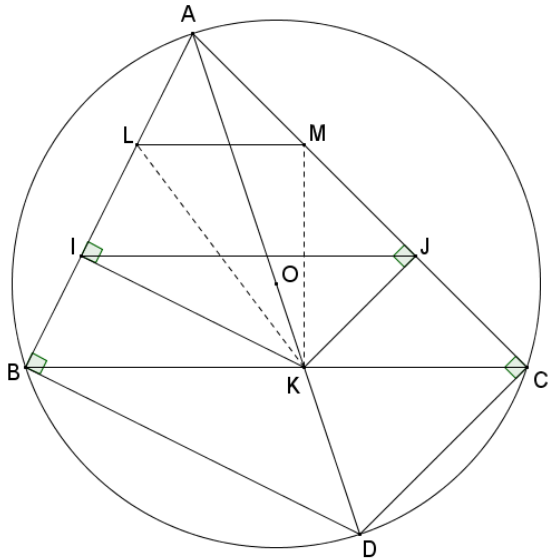


Problema 730

Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO con BC . Sobre los lados AB y AC , los puntos L y M son tales que $KL=KB$ y $KM=KC$. Demostrar que los segmentos LM y BC son paralelos.

Estonia (2004) Selección del equipo para la IMO

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Comme le triangle ABC est acutangle, les points L et M sont à l'intérieur des côtés AB et AC . Soit D le deuxième point d'intersection de la droite AO avec le cercle circonscrit au triangle ABC . Les triangles ABD et ACD qui admettent AD comme diamètre sont respectivement rectangles en B et en C .

Soient I et J les milieux des segments BL et CM . Par hypothèse, les triangles BKL et CKM sont isocèles, les droites KI et KJ sont donc les médiatrices des segments BL et CM .

Les triangles ABD et AIK sont rectangles en B et I . Ils partagent le même angle $\angle BAD$. Ils sont donc semblables. Il en est de même des triangles rectangles ACD et AJK .

D'où $IK/BD = AK/AD = JK/CD$. Comme $\angle BDC = \angle IKJ = 180^\circ - \angle BAC$, les triangles BDC et IKJ sont semblables. De même que IK est parallèle à BD , IJ est parallèle à BC .

Comme $LI = IB$ et $MJ = JC$, d'après le théorème de Thalès, LM est parallèle à IJ et à BC .

Cqfd