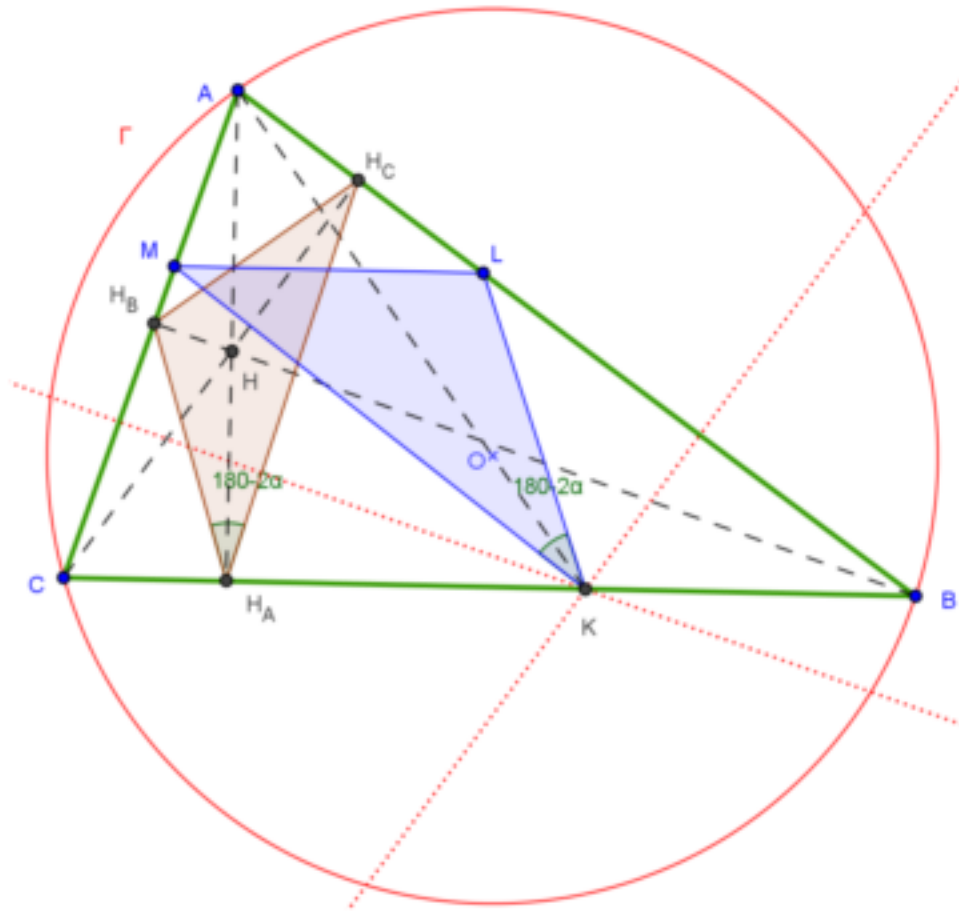


Problema 730.

Problema 2.- Sea O el circuncentro del triángulo acutángulo ABC y sea K el punto de intersección de AO con BC . Sobre los lados AB y AC , los puntos L y M son tales que $KL=KB$ y $KM=KC$. Demostrar que los segmentos LM y BC son paralelos.

Estonia(2004).Selección del equipo para la IMO.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sean α, β y γ los ángulos del triángulo ABC .

Para construir L bastará con trazar el simétrico de B respecto de la perpendicular por K al lado $c = AB$. Análogamente construiremos M . Vamos a demostrar que el triángulo órtico $H_AH_BH_C$, formado con los pies de las alturas, y el triángulo KLM son semejantes.

La longitud de H_AH_B es $c \cdot \cos \gamma$ y expresiones análogas para los demás lados. El ángulo en H_A es $180 - 2\alpha$.

Por construcción $\angle MKC = 180 - 2\gamma$, $\angle LKB = 180 - 2\beta$ y de ahí se deduce que $\angle LKM = 180 - 2\alpha$. Como el ángulo del triángulo órtico en el vértice H_A también tiene esa medida, concluiremos la semejanza demostrando que los lados de esos ángulos son proporcionales.

Sabemos que el ortocentro y el circuncentro son conjugados ortogonales, por tanto $\angle H_AAC = 90 - \gamma = \angle BAK$, y entonces $\angle AKB = 90 - \beta + \gamma$. Con esto tenemos para el triángulo $\triangle BAK$, en virtud del teorema de los senos la siguiente relación:

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}(90 - \beta + \gamma)} = \frac{KB}{\operatorname{sen}(90 - \gamma)}$$

de donde resulta

$$KB = KL = \frac{c \cdot \cos \gamma}{\cos(\beta - \gamma)} = \frac{H_AH_B}{\cos(\beta - \gamma)}$$

Para el triángulo CAK la situación es similar permutando B y C y se obtiene

$$KC = KM = \frac{b \cdot \cos \beta}{\cos(\gamma - \beta)} = \frac{H_AH_C}{\cos(\beta - \gamma)}$$

Con esto queda demostrada la semejanza, y ahora, haciendo un cómputo de ángulos resulta:

$$\angle ALM = 180 - (\angle MLK + \beta) = 180 - (180 - 2\beta + \beta) = \beta$$

En consecuencia LM es paralelo a BC como se pretendía demostrar. ■