

Solución al Problema 731

propuesto en Triángulos Cabri

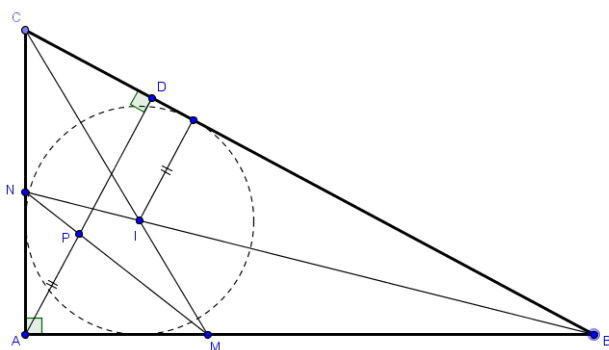
quincena del 16 al 31 de marzo de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Marzo 16, 2015

Problema 731. *Antúñez, I., Luque, C. (2002): Apuntes de preparación de Olimpiadas en Córdoba. Documento no publicado.*
15.- En el triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura AD (D pertenece a BC). Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B , respectivamente. Sea P el punto de intersección de AD y MN . Demostrar que $AP = r$, el radio de la circunferencia inscrita en ABC .

Solución 731. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas la altura AD tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a^2 & S_C & S_B \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad AD \equiv S_B y - S_C z = 0$$

Las bisectrices interiores se cortan en el incentro $I(a : b : c)$, por tanto los pies M y N tienen coordenadas $M(a : b : 0)$ y $N(a : 0 : c)$. Entonces la recta MN tiene ecuación

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ a & 0 & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad MN \equiv bcx - acy - abz = 0$$

Por tanto, $P = AD \cap MN = (abS_B + acS_C : bcS_C : bcS_B)$.

La distancia de un punto $P(x : y : z)$ al vértice A viene dada por la expresión

$$AP^2 = \frac{c^2 y^2 + 2S_A yz + b^2 z^2}{(x + y + z)^2}$$

en nuestro caso particular, siendo el triángulo ABC rectángulo en A , tenemos que $S_A = 0$, $S_B = c^2$, $S_C = b^2$, por tanto

$$AP^2 = \frac{b^2 c^2 (b^2 S_B^2 + c^2 S_C^2)}{a^2 (abc + bS_B + cS_C)^2} = \frac{a^2 b^2 c^2 S^2}{a^2 b^2 c^2 (a + b + c)^2} \quad \Rightarrow \quad AP = \frac{S}{a + b + c} = \frac{S}{2s} = r, \quad q.e.d.$$