

Problema 731. No triángulo ABC rectángulo en A , trázase a altura AD (D pertence a BC). Sexan M (sobre AB) e N (sobre AC) os pés das bisectrices interiores dos ángulos C e B , respectivamente. Sexa P o punto de intersección de AD e MN . Demostrar que $AP = r$, o raio da circunferencia inscrita en ABC .

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = \frac{a+b+c}{2}$ e S a área de ABC e

considérese a referencia cartesiana rectangular na que as coordenadas dos vértices de ABC son $A(0,0)$, $B(c,0)$ e $C(0,b)$. Entón as ecuacións das rectas

BC e AD son $BC: y - 0 = -\frac{b}{c}(x - c)$ e $AD: y - 0 = \frac{c}{b}(x - 0)$ e o seu punto

de intersección é $D\left(\frac{b^2c}{a^2}, \frac{bc^2}{a^2}\right)$, onde se utilizou o teorema de Pitágoras

$a^2 = b^2 + c^2$ en ABC . Aplicando o teorema da bisectriz interior do ángulo C

en ABC , resulta que $\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AC}{BC}$, logo $AM = \frac{bc}{a+b}$, co cal $M\left(\frac{bc}{a+b}, 0\right)$;

analogamente, $N\left(0, \frac{bc}{a+c}\right)$. Entón $MN: y - \frac{bc}{a+c} = \frac{\frac{bc}{a+c}}{-\frac{bc}{a+b}}(x - 0)$, sendo polo

tanto $P\left(\frac{b^2c}{2ap}, \frac{bc^2}{2ap}\right)$ o punto de intersección de $AD: y = \frac{c}{b}x$ e

$MN: y = -\frac{a+b}{a+c}x + \frac{bc}{a+c}$; así,

$$AP = \sqrt{\left(\frac{b^2c}{2ap} - 0\right)^2 + \left(\frac{bc^2}{2ap} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{(bc)^2(b^2 + c^2)}{(2ap)^2}} = \frac{bc}{2p}. \quad \text{Como } pr = S = \frac{bc}{2},$$

dedúcese que $AP = r$.