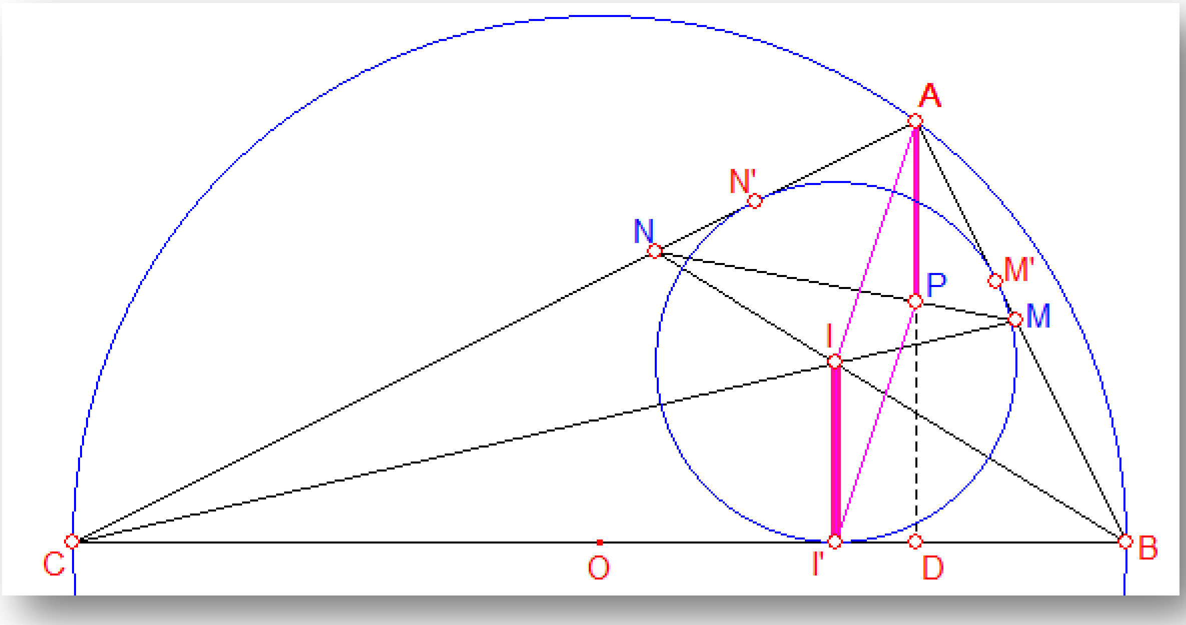
Problema 731.-
En el triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura AD (D pertenece a BC). Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente.
Sea P el punto de intersección de AD y MN.
Demostrar que AP=r, el radio de la circunferencia inscrita en ABC.

Antúnez, I., Luque, C. (2002): Apuntes de preparación de Olimpíadas en Córdoba. Documento no publicado.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.



Siguiendo la costumbre usual de notación de los lados del triángulo ABC, rectángulo en A, podemos escribir los segmentos AN y AM que determinan las respectivas bisectrices, BN y CM:

$$AN = \frac{bc}{a+c}; AM = \frac{bc}{a+b}.$$

Por otro lado, si suponemos que $AP = r$, debemos probar que $NP + PM = NM$.

Para ello, en el triángulo ANP, tenemos conocidos dos lados AN, AP y el ángulo que determinan estos $\measuredangle NAP = \measuredangle B$ y que, por tanto, $cos\measuredangle B = \frac{c}{a}$

Sabemos que $r = \frac{bc}{a+b+c}$ y teniendo en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$, podemos expresar todos los segmentos involucrados en términos más sencillos.

En definitiva,

$$NP^2 = \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b+c}\right)^2 - 2\frac{bc}{a+c}\frac{bc}{a+b+c}\frac{c}{a}$$

$$NP^2 = \frac{b^4c^2(3a+2b+2c)}{a(a+c)^2(a+b+c)^2} \to NP = \frac{b^2c\sqrt{3a+2b+2c}}{(a+c)(a+b+c)\sqrt{a}}$$

De forma análoga, obtendríamos

$$MP = \frac{c^2 b\sqrt{3a+2b+2c}}{(a+b)(a+b+c)\sqrt{a}}$$

Así hemos obtenido que

$$NP + MP = \frac{bc\sqrt{3a+2b+2c}}{(a+b+c)\sqrt{a}}\left(\frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \rightarrow$$

$$(NP+MP)^2 = \frac{b^2c^2(3a+2b+2c)}{(a+c)^2(a+b)^2 a}\left(\frac{b(a+b)+c(a+c)}{a+b+c}\right)^2$$

$$(NP+MP)^2 = \frac{b^2c^2(3a+2b+2c)}{(a+c)^2(a+b)^2 a}\left(\frac{b(a+b)+c(a+c)}{a+b+c}\right)^2 \qquad (I)$$

Por otro lado,

$$NM^2 = AM^2 + MN^2 = \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2(a+b)^2}\left((a+b)^2 + (a+c)^2\right)$$

Desarrollando esta última igualdad:

$$NM^2 = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2(a+b)^2}\left((a+b)^2 + (a+c)^2\right) = \frac{b^2c^2}{(a+c)^2(a+b)^2}(3a^2 + 2ab + 2ac)$$

$$NM^2 = \frac{b^2c^2a^2}{a(a+c)^2(a+b)^2}(3a+2b+2c) \qquad (II)$$

Veamos que, en efecto , $NM = NP + MP$.

Para ello, probaremos que $(I) = (II)$.

Y esto último es cierto si y sólo si:

$$\left(\frac{b(a+b)+c(a+c)}{a+b+c}\right)^2 = a^2 \leftrightarrow \frac{b(a+b)+c(a+c)}{a+b+c} = a$$

$$b(a+b) + c(a+c) = a(a+b+c) \leftrightarrow ab + b^2 + ac + c^2 = a^2 + ab + ac$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \qquad\qquad cqd\blacksquare$$