Problema 731

Bloque II .- "Esto empieza a pasar de castaño oscuro.."

15.- En el triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura AD (D pertenece a BC).

Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente.

Sea P el punto de intersección de AD y MN.

Demostrar que AP=r, el radio de la circunferencia inscrita en ABC.

Antúnez, I., Luque, C. (2002): Apuntes de preparación de Olimpíadas en Córdoba. Documento no publicado.

Solución del editor.

Sea b>c.

Al ser M pie de la bisectriz interior del ángulo en C, es:

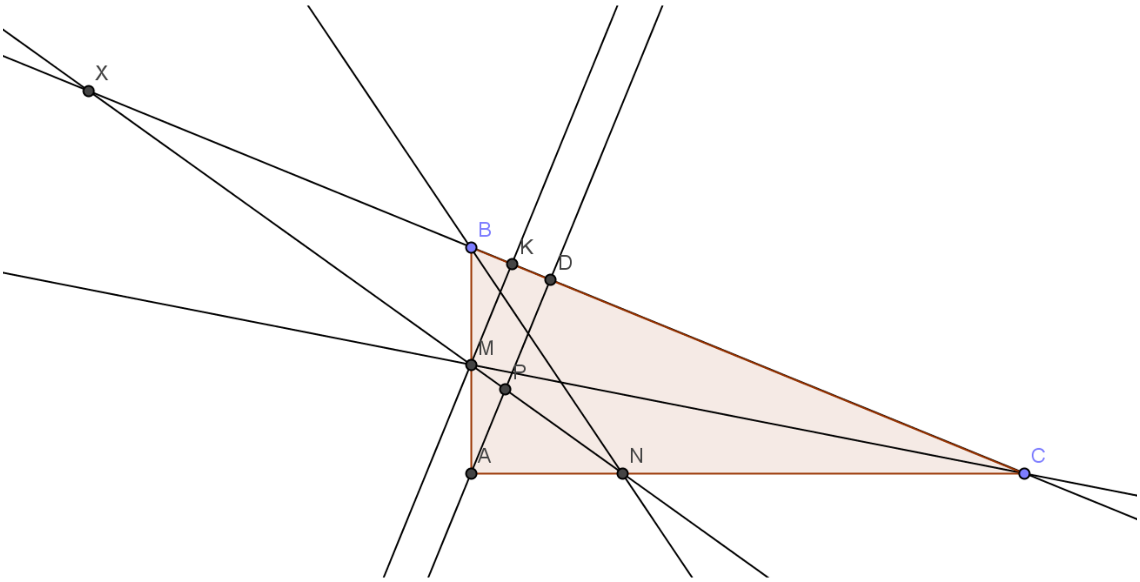
$$BM = \frac{ca}{b+a}, AM = \frac{cb}{b+a}$$

De igual manera al ser N pie de la bisectriz interior del ángulo en B, es:

$$CN = \frac{ba}{c+a}, AN = \frac{cb}{c+a}$$

La transversal MN cortará a BC en X, con XB=u, siendo por Menelao:

$$(u+a)\frac{ca}{b+a}\frac{cb}{a+c} = u\frac{ba}{c+a}\frac{cb}{b+a}$$



De donde se tiene que $XB = u = \frac{ac}{b-c}$

Por otra parte, la altura AD es: $AD = \frac{bc}{a}$Y, por otra parte, es $BD = \frac{c^2}{a}$

Sea MK la perpendicular desde M a BC.

El triángulo MKB es semejante al CAB por lo que

$\frac{MK}{MB} = \frac{CA}{CB}, de\ donde\ MK = \frac{ca}{b+a}\frac{b}{a} = \frac{bc}{b+a}, y\ BK = \frac{c^2}{b+a}$

Los triángulos XKM y XDP son semejantes.

$$XK = XB + BK = \frac{a^2c + abc + c^2b - c^3}{(b-c)(a+b)}$$

Además es $XD = XB + BD = \frac{ac}{b-c} + \frac{c^2}{a}$

Es $\frac{XK}{XD} = \frac{MK}{PD}$

$$PD = \frac{\frac{bc}{b+a}\left(\frac{ac}{b-c} + \frac{c^2}{a}\right)}{\frac{a^2c + abc + c^2b - c^3}{(b-c)(a+b)}} = \frac{bc(a^2 + bc - c^2)}{a(a^2 + ab + bc - c^2)}$$

Así, tenemos

$$AP = AD - PD = \frac{bc}{a} - \frac{bc(a^2 + bc - c^2)}{a(a^2 + ab + bc - c^2)}$$

Es decir, $AP = \frac{bc}{a+b+c}$=r cqd.

Ricardo Barroso Campos. Jubilado.

Director de trianguloscabri.

Sevilla