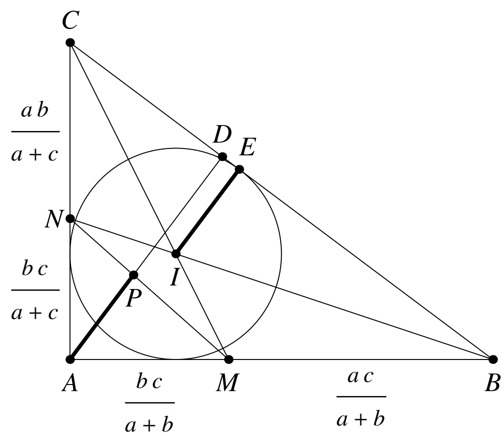
Problema 731 de triánguloscabri. *En el triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura AD (D pertenece a BC). Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente. Sea P el punto de intersección de AD y MN. Demostrar que $AP = r$, el radio de la circunferencia inscrita en ABC.*

Antúnez, I., Luque, C. (2002): Apuntes de preparación de Olimpiadas en Córdoba. Documento no publicado.

Solución de Francisco Javier García Capitán. Tomando A como origen de coordenadas cartesianas y usando el teorema de la bisectriz podemos construir la siguiente figura:



El punto P es intersección de las rectas $(a+b)x + (a+c)y = bc$, obtenida a partir de la ecuación segmentaria y $cy - bx = 0$, perpendicular a $BC : \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, resultando

$$P = \left(\frac{b^2c}{b^2 + c^2 + ab + ac}, \frac{bc^2}{b^2 + c^2 + ab + ac} \right) = \left(\frac{b^2c}{a(a+b+c)}, \frac{bc^2}{a(a+b+c)} \right).$$

Entonces,

$$AP = \frac{bc}{a(a+b+c)}\sqrt{b^2 + c^2} = \frac{bc}{a+b+c} = \frac{b+c-a}{2} = r.$$