

Problema 731.

En el triangle rectangle $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ es traça l'altura $\overline{AD}$ (D pertany a $\overline{BC}$)

Siga M sobre $\overline{AB}$ i N sobre $\overline{AC}$ peu de les bisectrius interiors als angles C i B, respectivament.

Siga P el punt intersecció de $\overline{AD}$ i $\overline{MN}$.

Proveu que $\overline{AP} = r$, radi de la circumferència inscrita al triangle $\triangle ABC$.

Solució de Ricard Peiró:

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$$\overline{AM} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{AN} = \frac{bc}{a+c}.$$

Siga $\alpha = \angle AMN$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle APM$:

$$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AM}}{\sin(C + \alpha)}.$$

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AM} \cdot \sin \alpha}{\sin(C + \alpha)} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}{\frac{c}{a} \overline{MN} + \frac{b}{a} \overline{MN}} = \frac{a \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN}}{c \cdot \overline{AM} + b \cdot \overline{AN}}.$$

$$\overline{AP} = \frac{a}{\frac{c}{\overline{AN}} + \frac{b}{\overline{AM}}} = \frac{a}{\frac{c}{\frac{bc}{a+c}} + \frac{b}{\frac{bc}{b+c}}} = \frac{abc}{ac + c^2 + ab + b^2} = \frac{abc}{a(a+b+c)} = \frac{bc}{a+b+c}.$$

L'àrea del triangle rectangle $\triangle ABC$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

$$\text{Aleshores: } \overline{AP} = \frac{r(a+b+c)}{a+b+c} = r.$$

