

Problema 731.

En el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, $A = 90^\circ$ se traza la altura $\overline{AD}$ (D pertenece a $\overline{BC}$)
 Sea M sobre $\overline{AB}$ y N sobre $\overline{AC}$ pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B ,
 respectivamente.

Sea P el punto intersección de $\overline{AD}$ y $\overline{MN}$.

Demostrar que $\overline{AP} = r$, radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\triangle ABC$.

Solución de Ricard Peiró:

Aplicando la propiedad de la bisectriz:

$$\overline{AM} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{AN} = \frac{bc}{a+c}.$$

Sea $\alpha = \angle AMN$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle APM$:

$$\frac{\overline{AP}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AM}}{\sin(C + \alpha)}.$$

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AM} \cdot \sin \alpha}{\sin(C + \alpha)} = \frac{\overline{AM} \cdot \overline{AN}}{\frac{c}{a} \overline{AM} + \frac{b}{a} \overline{AN}} = \frac{a \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN}}{c \cdot \overline{AM} + b \cdot \overline{AN}}.$$

$$\overline{AP} = \frac{a}{\frac{c}{\overline{AN}} + \frac{b}{\overline{AM}}} = \frac{a}{\frac{c}{\frac{bc}{a+c}} + \frac{b}{\frac{bc}{b+c}}} = \frac{abc}{ac + c^2 + ab + b^2} = \frac{abc}{a(a+b+c)} = \frac{bc}{a+b+c}.$$

El área del triángulo rectángulo $\triangle ABC$ es:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}(a+b+c)r.$$

$$\text{Entonces: } \overline{AP} = \frac{r(a+b+c)}{a+b+c} = r.$$

