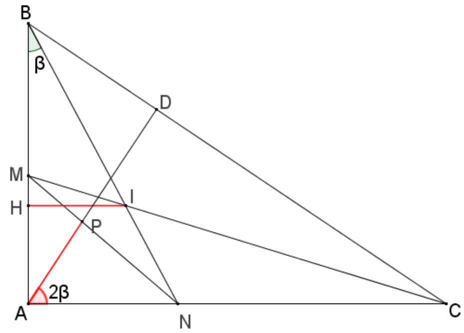
Problema 731
Bloque II .- "Esto empieza a pasar de castaño oscuro.."
15.- En el triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura AD (D pertenece a BC).
Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente.Sea P el punto de intersección de AD y MN.Demostrar que AP=r, el radio de la circunferencia inscrita en ABC.
Antúnez, I., Luque, C. (2002): Apuntes de preparación de Olimpíadas en Córdoba. Documento no publicado.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche



Sans perte de généralité,on pose AB = 1 et tan(∠ABN) = tan(β) = t.

On en déduit :
AN = t puis AC = tan(2β) = $2t/(1 - t^2)$ et enfin AM = AC.tan(45°– β) = $2t/(1 + t)^2$
L'équation de la droite MN est donc $(1+t)^2Y + 2X = 2t$.

Par ailleurs l'équation de la droite AD est $Y = \tan(2\beta)X = 2tX/(1 - t^2)$

Le point P à l'intersection de la droite AD et de la droite MN a donc pour coordonnées :
$x_P = t(1 - t)/(1 + t^2)$ et $y_P = 2t^2/(1 + t^2)(1 + t)$
D'où $AP^2 = [t/(1 + t)]^2.[(1 - t^2)^2 + 4t^2)/(1 + t^2)^2] = (t/(1 + t)^2$ et $AP = t/(1 + t)$

Soient I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et H sa projection sur AB. Le rayon r du cercle inscrit est tel que :
r = IH = BH.tan(β) = (AB – AH).t = (1 – r).t. d'où r = t/(1 + t).

Il en résulte AP = r. Cqfd.

Note : **le point P est à l'intersection de MN, de la hauteur AD et des parallèles aux bissectrices internes du triangle ABC passant par les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle ABC.**