Problema 731

Bloque II.- "Esto empieza a pasar de castaño oscuro…"

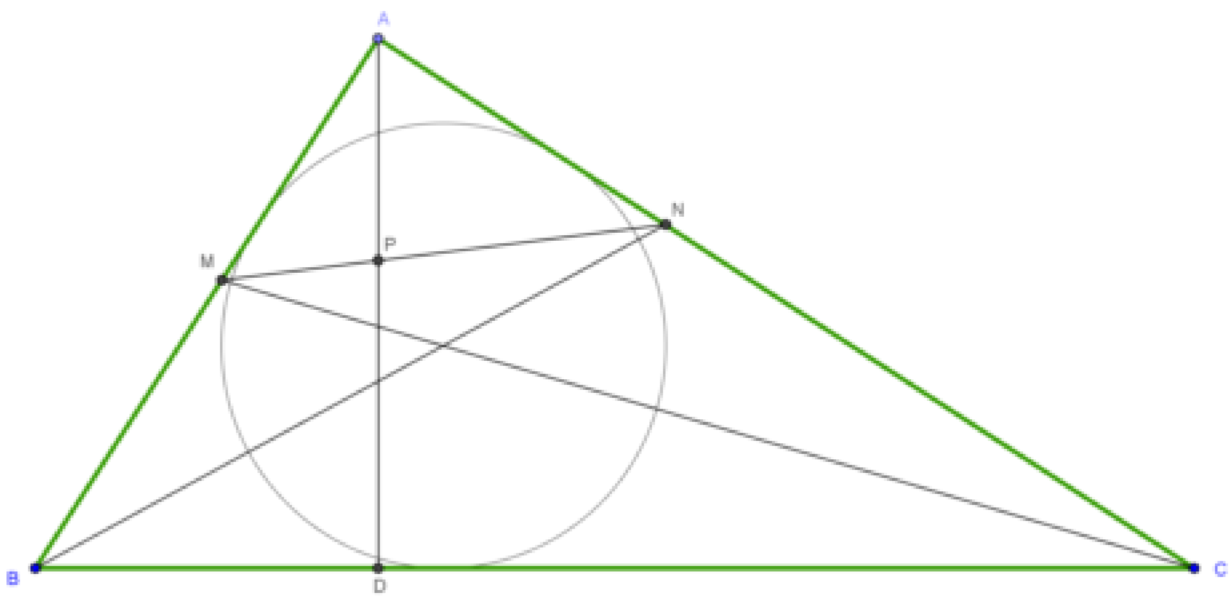
15. *En el triángulo ABC rectángulo en A se traza la altura AD (D pertenece a BC).*

Sean M (sobre AB) y N (sobre AC) los pies de las bisectrices interiores de los ángulos C y B, respectivamente.

Sea P el punto de intersección de AD y MN.

Demostrar que AP=r, el radio de la circunferencia inscrita en ABC.

Antúnez, I., Luque, C. (2002): Apuntes de preparación de Olimpiadas en Córdoba. Documento no publicado.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Con la notación usual para los lados del triángulo $a, b, c,$ y como aplicación del teorema de la bisectriz se tienen $AM = \frac{bc}{a+b}; AN = \frac{bc}{a+c}$.

El cálculo de AP lo haremos a través del área del triángulo AMN.

Tenemos:

$2[AMN] = AM \cdot AN = \frac{(bc)^2}{(a+b)(a+c)}$ y también $2[AMN] = 2[AMP] = +2[APN] = AP \cdot [AM \cdot sen\,(90-B) + AN \cdot sen\,(90-C)] = \frac{AP}{a} \cdot \left(\frac{bc^2}{a+b} + \frac{b^2c}{a+c}\right) = AP \cdot \frac{bc}{a} \cdot \frac{c(a+c)+b(a+b)}{(a+b)(a+c)}$.

De la igualdad de estas dos expresiones del área de ese triángulo podemos despejar AP.

$$\boxed{AP = \frac{abc}{c(a+c)+b(a+b)}}$$

En el triángulo rectángulo, también desde la fórmula del área, se tiene $r = \frac{bc}{2s}$, donde s es el semiperímetro. El denominador de AP puede expresarse de forma más sencilla:

$$c(a+c) + b(a+b) = a(c+b) + c^2 + b^2 = a(c+b) + a^2 = a(c+b+a) = 2as;$$

por tanto

$$AP = \frac{abc}{2as} = \frac{bc}{2s} = r.$$

■