

Solución al Problema 732
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 1 al 15 de abril de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Abril 9, 2015

Problema 732. *Prasolov. V.V.(1986) : Problemas de planimetría (Moscú).*

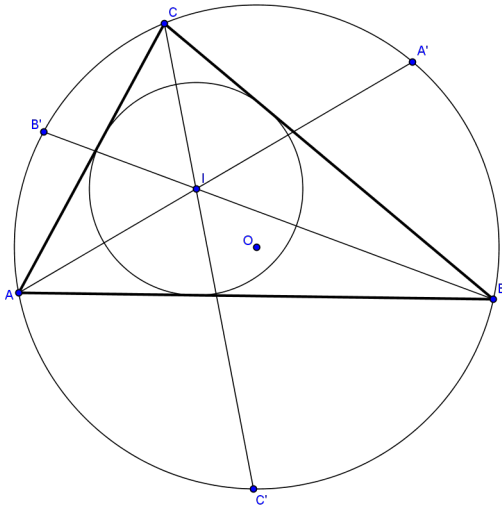
Problema 11.7 Sea I el incentro de ABC y sean A' , B' y C' las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita a ABC .

1.- Demostrar que $(IA'IC')/IB = R$

2.- Demostrar que $(IAIC)/IB' = 2r$

Donde R es el circunradio y r es el inradio.

Solución 732. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas y la fórmula que da la distancia entre dos puntos tenemos que

$$IA = \sqrt{\frac{bc(s-a)}{s}}, \quad IB = \sqrt{\frac{ac(s-b)}{s}}, \quad IC = \sqrt{\frac{ab(s-c)}{s}}$$

Ahora los puntos A' , B' y C' tienen coordenadas

$$A'(-a^2 : b(b+c) : c(b+c)), \quad B'(a(a+c) : -b^2 : c(a+c)), \quad C'(a(a+b) : b(a+b) : -c^2)$$

por tanto usando siempre la fórmula que da la distancia entre dos puntos

$$IA' = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{bc}{s(s-a)}}, \quad IB' = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{ac}{s(s-b)}}, \quad IC' = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{ab}{s(s-c)}}$$

Entonces

$$\frac{IA'IC'}{IB} = \frac{abc}{4s} \sqrt{\frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)}} = \frac{abc}{4rs} = \frac{abc}{2S} = R$$

y

$$\frac{IAIC}{IB'} = 2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = 2r, \quad q.e.d.$$