Problema 732. Sea I el incentro de ABC y sean A', B', C' las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita a ABC.

1.- Demostrar que $IA' \cdot IC' / IB = R$.

2.- Demostrar que $IA \cdot IC / IB' = 2r$.

Donde R es el circunradio y r es el inradio.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean $\mathcal{C}$ la circunferencia circunscrita a ABC, I' el pie de la perpendicular trazada desde I a AB, $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = (a+b+c)/2$, S el área de ABC y denotemos los ángulos interiores de ABC por la letra que indica su vértice.

Consideremos la bisectriz AI y observemos el cuadrilátero ABA' inscrito en $\mathcal{C}$.
Como A, I y A' están alineados, $\angle BAA' = \angle BAI = A/2 = \angle IAC = \angle A'AC$, con lo cual A' es el punto medio del arco BC que contiene a A' en $\mathcal{C}$.

Además, $\angle A'BC = \angle A'AC = A/2 = \angle BCA' = \angle BAA'$, $\angle CA'A = \angle CBA = B$ y $\angle AA'B = \angle ACB = C$ por ser ángulos inscritos en $\mathcal{C}$ que abarcan el mismo arco.

En los triángulos IBA' e $II'B$, los ángulos en B son

$$\angle A'BI = \angle A'BC + \angle CBI = A/2 + B/2 = \pi/2 - C/2 \quad \text{y} \quad \angle IBI' = \angle IBA = B/2,$$

respectivamente. Aplicando el teorema de los senos en IBA' e $II'B$, resulta

$$IA' = \operatorname{sen}(\pi/2 - C/2)\, IB / \operatorname{sen} C = \cos(C/2)\, r / \operatorname{sen}(B/2) / \big(2 \operatorname{sen}(C/2) \cos(C/2)\big)$$
$$= r / \big(2 \operatorname{sen}(B/2) \operatorname{sen}(C/2)\big).$$

Análogamente, $IB' = r / \big(2 \operatorname{sen}(C/2) \operatorname{sen}(A/2)\big)$ e $IC' = r / \big(2 \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(B/2)\big)$, con lo cual

$$IA' \cdot IC' / IB = r^2 / \big(4 \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}^2(B/2) \operatorname{sen}(C/2)\big) / \big(r / \operatorname{sen}(B/2)\big)$$
$$= r / \big(4 \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(B/2) \operatorname{sen}(C/2)\big).$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{sen}(A/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/(bc)}$,

$\operatorname{sen}\left(B/2\right) = \sqrt{\left(p-c\right)\left(p-a\right)/\left(ca\right)}$, $\operatorname{sen}\left(C/2\right) = \sqrt{\left(p-a\right)\left(p-b\right)/\left(ab\right)}$,

$pr = S = \dfrac{1}{2}ab\operatorname{sen}C = \dfrac{1}{2}ab\dfrac{c}{2R}$ y $\left(pr\right)^2 = S^2 = p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)$, obtenemos

1.- $IA' \cdot IC'/IB = r/\left(4\operatorname{sen}\left(A/2\right)\operatorname{sen}\left(B/2\right)\operatorname{sen}\left(C/2\right)\right)$

$= r/\left(4\sqrt{\left(p-a\right)^2\left(p-b\right)^2\left(p-c\right)^2/\left(abc\right)^2}\right) = abcr/\left(4\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\right)$

$= 4pr^2R/\left(4pr^2\right) = R$ y

2.- $IA \cdot IC/IB' = r^2/\left(\operatorname{sen}\left(A/2\right)\operatorname{sen}\left(C/2\right)\right)/\left(r/\left(2\operatorname{sen}\left(C/2\right)\operatorname{sen}\left(A/2\right)\right)\right) = 2r$.