

Problema 732. Sea I el incentro de ABC y sean A' , B' , C' las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita a ABC .

1.- Demostrar que $IA' \cdot IC' / IB = R$.

2.- Demostrar que $IA \cdot IC / IB' = 2r$.

Donde R es el circunradio y r es el inradio.

Segunda solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Denotemos los ángulos interiores de ABC por la letra que indica su vértice.

En la referencia (1) citada abajo, se demuestra que la circunferencia de centro A' y radio $A'I$ (pasa por B y C y) verifica que dicho radio es

$IA' = 2R \sin(A/2)$ y que su cuerda $IC = 4R \sin(A/2) \sin(B/2)$.

Análogamente, se tendrán las igualdades $IB' = 2R \sin(B/2)$, $IC' = 2R \sin(C/2)$,

$IA = 4R \sin(B/2) \sin(C/2)$ e $IB = 4R \sin(A/2) \sin(C/2)$, luego

1.- $IA' \cdot IC' / IB = 4R^2 \sin(A/2) \sin(C/2) / (4R \sin(A/2) \sin(C/2)) = R$.

Y según la referencia (2),

2.- $IA \cdot IC / IB' = 16R^2 \sin(A/2) \sin^2(B/2) \sin(C/2) / (2R \sin(B/2))$
 $= 8R \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2) = 2r$.

(1) primer teorema de 292, página 185 y primera igualdad de 293. b, página 186;

(2) última igualdad de 293. b, página 186, del libro

Advanced Euclidean Geometry, Johnson, R. A., Dover, 1960.