

Problema 732. Sexa I o incentro de ABC e sexan A' , B' , C' as interseccións das bisectrices coa circunferencia circunscrita a ABC .

1.- Demostrar que $IA' \cdot IC' / IB = R$.

2.- Demostrar que $IA \cdot IC / IB' = 2r$.

Onde R é o circunraio e r é o inraio.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $\mathcal{C}$ a circunferencia circunscrita a ABC , I' o pé da perpendicular trazada desde I a AB , $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $p = (a + b + c)/2$, S a área de ABC e denotemos os ángulos interiores de ABC pola letra que indica o seu vértice.

Consideremos a bisectriz AI e observemos o cuadrilátero ABA' inscrito en $\mathcal{C}$.

Como A , I e A' están aliñados, $\angle BAA' = \angle BAI = A/2 = \angle IAC = \angle A'AC$,

co cal A' é o punto medio do arco BC que contén a A' en $\mathcal{C}$.

Ademais, $\angle A'BC = \angle A'AC = A/2 = \angle BCA' = \angle BAA'$, $\angle CA'A = \angle CBA = B$ e $\angle AA'B = \angle ACB = C$ por ser ángulos inscritos en $\mathcal{C}$ que abarcan o mesmo arco.

Nos triángulos IBA' e $II'B$, os ángulos en B son

$\angle A'BI = \angle A'BC + \angle CBI = A/2 + B/2 = \pi/2 - C/2$ e $\angle IBI' = \angle IBA = B/2$,

respectivamente. Aplicando o teorema dos senos en IBA' e $II'B$, resulta

$$\begin{aligned} IA' &= \frac{\sin(\pi/2 - C/2) IB}{\sin C} = \frac{\cos(C/2) r}{\sin(B/2)} \frac{1}{(2 \sin(C/2) \cos(C/2))} \\ &= \frac{r}{(2 \sin(B/2) \sin(C/2))}. \end{aligned}$$

Analogamente, $IB' = \frac{r}{(2 \sin(C/2) \sin(A/2))}$ e $IC' = \frac{r}{(2 \sin(A/2) \sin(B/2))}$,

co cal

$$\begin{aligned} IA' \cdot IC' / IB &= \frac{r^2}{(4 \sin(A/2) \sin^2(B/2) \sin(C/2))} \frac{1}{(r / \sin(B/2))} \\ &= \frac{r}{(4 \sin(A/2) \sin(B/2) \sin(C/2))}. \end{aligned}$$

Tendo en conta que $\sin(A/2) = \sqrt{(p-b)(p-c)/(bc)}$,

$$\operatorname{sen}\left(B/2\right)=\sqrt{\left(p-c\right)\left(p-a\right)/\left(ca\right)}, \operatorname{sen}\left(C/2\right)=\sqrt{\left(p-a\right)\left(p-b\right)/\left(ab\right)},$$

$$pr=S=\frac{1}{2}ab\operatorname{sen}C=\frac{1}{2}ab\frac{c}{2R} \text{ e } \left(pr\right)^2=S^2=p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right), \text{ obtemos}$$

$$1.- IA' \cdot IC'/IB = r/\left(4\operatorname{sen}\left(A/2\right)\operatorname{sen}\left(B/2\right)\operatorname{sen}\left(C/2\right)\right)$$

$$= r/\left(4\sqrt{\left(p-a\right)^2\left(p-b\right)^2\left(p-c\right)^2/\left(abc\right)^2}\right)=abc r/\left(4\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)\right)$$

$$=4pr^2R/\left(4pr^2\right)=R \text{ e}$$

$$2.- IA \cdot IC/IB' = r^2/\left(\operatorname{sen}\left(A/2\right)\operatorname{sen}\left(C/2\right)\right)/\left(r/\left(2\operatorname{sen}\left(C/2\right)\operatorname{sen}\left(A/2\right)\right)\right)=2r.$$