

Problema 732. Sexa I o incentro de ABC e sexan A' , B' , C' as interseccións das bisectrices coa circunferencia circunscrita a ABC .

1.- Demostrar que $IA' \cdot IC' / IB = R$.

2.- Demostrar que $IA \cdot IC / IB' = 2r$.

Onde R é o circunraio e r é o inraio.

Segunda solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Denotemos os ángulos interiores de ABC pola letra que indica o seu vértice.

Na referencia (1) citada abaixo, demostrase que a circunferencia de centro A' e raio $A'I$ (pasa por B y C e) verifica que dito raio é $IA' = 2R \operatorname{sen}(A/2)$ e que a súa corda $IC = 4R \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(B/2)$.

Analogamente, teranse as igualdades $IB' = 2R \operatorname{sen}(B/2)$, $IC' = 2R \operatorname{sen}(C/2)$,

$IA = 4R \operatorname{sen}(B/2) \operatorname{sen}(C/2)$ e $IB = 4R \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(C/2)$, logo

1.- $IA' \cdot IC' / IB = 4R^2 \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(C/2) / (4R \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(C/2)) = R$.

E segundo a referencia (2),

2.- $IA \cdot IC / IB' = 16R^2 \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}^2(B/2) \operatorname{sen}(C/2) / (2R \operatorname{sen}(B/2))$
 $= 8R \operatorname{sen}(A/2) \operatorname{sen}(B/2) \operatorname{sen}(C/2) = 2r$.

(1) primeiro teorema de 292, páxina 185 e primeira igualdade de 293. b, páxina 186;

(2) última igualdade de 293. b, páxina 186, do libro

Advanced Euclidean Geometry, Johnson, R. A., Dover, 1960.