

Solución al Problema 732-complemento
propuesto en Triángulos Cabri
quincena del 16 al 30 de abril de 2015

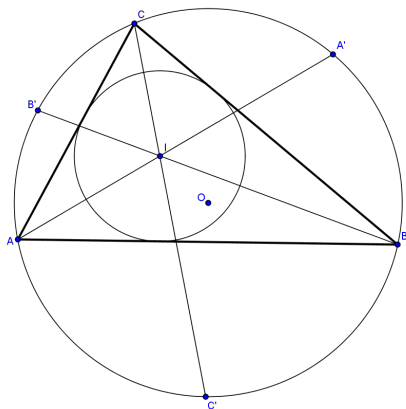
enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Abril 18, 2015

Problema 732-complemento. *Ricard Peiró(2007).*

Problema 784.- Las bisectrices del triángulo ABC referentes a los vértices A , B y C se intersecan con la circunferencia circunscrita en los puntos A' , B' y C' . Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente. Probar que $[ABC]/[A'B'C'] = 2r/R$

Solución 732-complemento. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas los puntos A' , B' y C' tienen coordenadas absolutas

$$\begin{aligned} A' & \left(\frac{-a^2}{2(S_A + bc)}, \frac{b(b+c)}{2(S_A + bc)}, \frac{c(b+c)}{2(S_A + bc)} \right) \\ B' & \left(\frac{a(a+c)}{2(S_B + ac)}, \frac{-b^2}{2(S_B + ac)}, \frac{c(a+c)}{2(S_B + ac)} \right) \\ C' & \left(\frac{a(a+b)}{2(S_C + ab)}, \frac{b(a+b)}{2(S_C + ab)}, \frac{-c^2}{2(S_C + ab)} \right) \end{aligned}$$

por tanto tenemos que

$$[A'B'C'] = [ABC] \frac{1}{8(S_A + bc)(S_B + ac)(S_C + ab)} \begin{vmatrix} -a^2 & b(b+c) & c(b+c) \\ a(a+c) & -b^2 & c(a+c) \\ a(a+b) & b(a+b) & -c^2 \end{vmatrix} =$$

$$= [ABC] \frac{abc}{64s^3(s-a)(s-b)(s-c)} \begin{vmatrix} -a & b+c & b+c \\ a+c & -b & a+c \\ a+b & a+b & -c \end{vmatrix} = [ABC] \frac{abc(a+b+c)^3}{64s^3(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ahora siendo $abc = 2RS$, $S = 2rs$, $a+b+c = 2s$ y $(s-a)(s-b)(s-c) = r^2s$ substituyendo tenemos que $[A'B'C'] = [ABC] \frac{R}{2r}$, q.e.d.