

Problema 732 c. Las bisectrices del triángulo ABC referentes a los vértices A , B y C se intersecan con la circunferencia circunscrita en los puntos A' , B' y C' . Sean R y r los radios de la circunferencia circunscrita e inscrita, respectivamente. Probar que $[ABC]/[A'B'C'] = 2r/R$.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sean $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = (a + b + c)/2$, I el incentro de ABC y denotemos los ángulos interiores de ABC por la letra que indica su vértice. Como $\angle B'C'A' = \angle B'C'C + \angle CC'A' = \angle B'BC + \angle BAA' = B/2 + A/2 = \pi/2 - C/2$,

del teorema de los senos generalizado en $A'B'C'$ resulta

$$A'B' = 2R \sin \angle B'C'A' = 2R \cos(C/2) \text{ y análogamente } A'C' = 2R \cos(B/2).$$

Como además

$$\angle B'A'C' = \angle B'A'I + \angle IA'C' = \angle B'A'A + \angle AA'C' = B/2 + C/2 = \pi/2 - A/2,$$

se tiene

$$\begin{aligned} [A'B'C'] &= (1/2) A'B' \cdot A'C' \sin \angle B'A'C' = (1/2) 2R \cos(C/2) 2R \cos(B/2) \cos(A/2) \\ &= 2R^2 \cos(A/2) \cos(B/2) \cos(C/2) = R^2 (\sin A + \sin B + \sin C)/2 \\ &= R^2 (a/(2R) + b/(2R) + c/(2R))/2 = R^2 (2p/(2R))/2 = pR/2 \text{ y al ser } [ABC] = pr, \text{ se} \\ &\text{concluye } [ABC]/[A'B'C'] = pr/pR/2 = 2r/R. \end{aligned}$$