

Problema 732 c. As bisectrices do triángulo ABC referentes aos vértices A , B e C intersécanse coa circunferencia circunscrita nos puntos A' , B' e C' . Sexan R e r os radios da circunferencia circunscrita e inscrita, respectivamente. Probar que $[ABC]/[A'B'C'] = 2r/R$.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

Sexan $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $p = (a + b + c)/2$, I o incentro de ABC e denotemos os ángulos interiores de ABC pola letra que indica o seu vértice. Como $\angle B'C'A' = \angle B'C'C + \angle CC'A' = \angle B'BC + \angle BAA' = B/2 + A/2 = \pi/2 - C/2$,

do teorema dos senos xeneralizado en $A'B'C'$ resulta

$$A'B' = 2R \sin \angle B'C'A' = 2R \cos(C/2) \text{ e analogamente } A'C' = 2R \cos(B/2).$$

Como ademais

$$\angle B'A'C' = \angle B'A'I + \angle IA'C' = \angle B'A'A + \angle AA'C' = B/2 + C/2 = \pi/2 - A/2,$$

tense

$$\begin{aligned} [A'B'C'] &= (1/2) A'B' \cdot A'C' \sin \angle B'A'C' = (1/2) 2R \cos(C/2) 2R \cos(B/2) \cos(A/2) \\ &= 2R^2 \cos(A/2) \cos(B/2) \cos(C/2) = R^2 (\sin A + \sin B + \sin C)/2 \\ &= R^2 (a/(2R) + b/(2R) + c/(2R))/2 = R^2 (2p/(2R))/2 = pR/2 \text{ e ao ser } [ABC] = pr, \\ \text{conclúese } [ABC]/[A'B'C'] &= pr/pR/2 = 2r/R. \end{aligned}$$