Problema 732

Problem784.- Les bisectrius del triangle

ABC referides als vèrtexs A, B, C s’intersecten amb la

circumferència circumscrita en els punts A' ,B',C' , respectivament. Siga R

i r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita, respectivament. Proveu que

c.- [ABC]/[A'B'C']=2r/R

Problema 784.- Las bisectrices del triángulo ABC referentes a los vértices A, B y C se interecan con la circunferencia circunscrita en los puntos A' B' y C'. Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente.

Probar que c.- [ABC]/[A'B'C']=2r/R

Peiró, R.(2007): Documento interno no publicado.

Una de las muchas fórmulas del área de un triángulo ABC es en función de los lados y del radio R de la circunferencia circunscrita.

[ABC]=$\frac{ah_a}{2}$

Dado que si H_a es el pie de la atura del vértice A y A* es el punto diametralmente opuesto a A, los triángulos AH_aB y ACA* son semejantes, es:

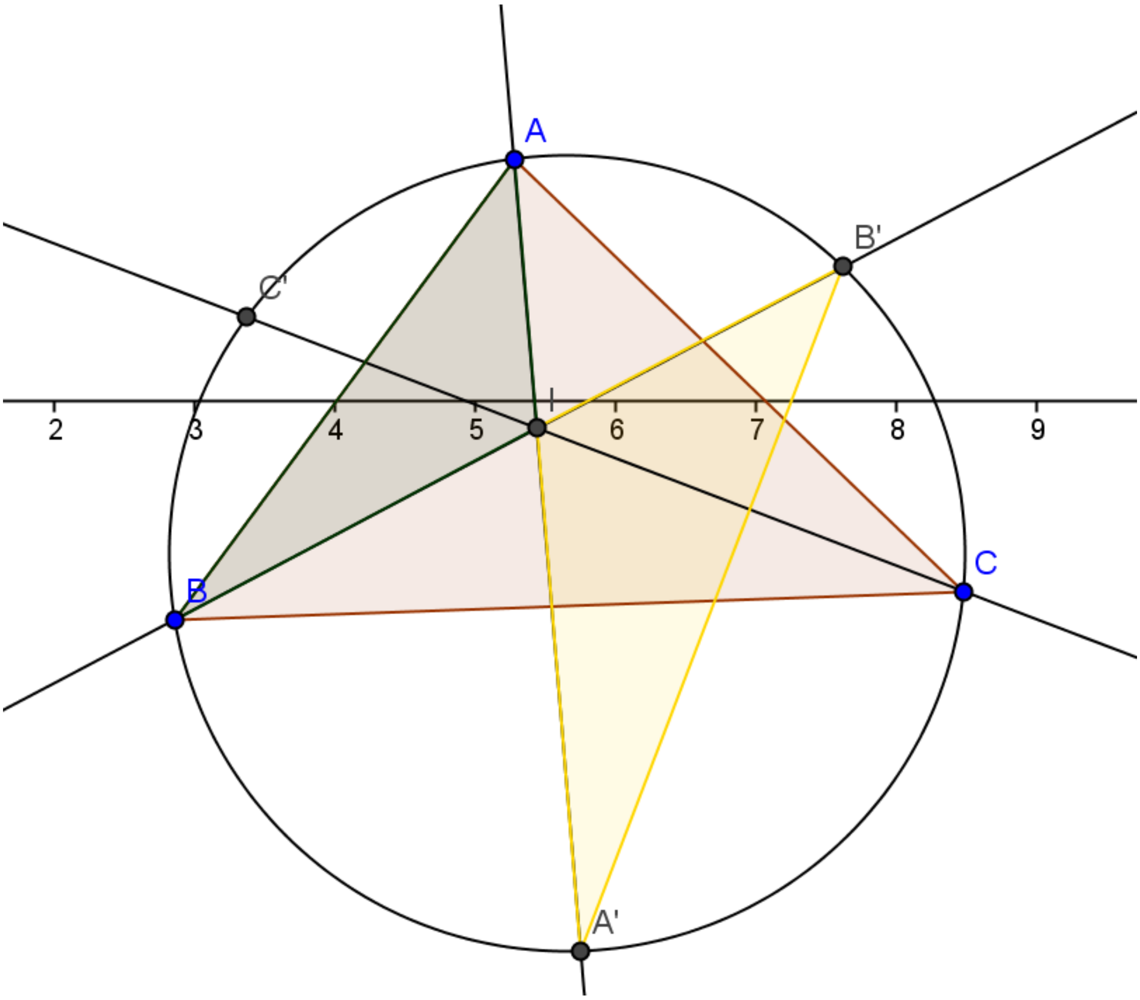
$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R} \rightarrow h_a = \frac{b\ c}{2R}$$

Y por ello, $[ABC] = \frac{abc}{4R}$.

Así, la relación pedida es :

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = \frac{\frac{abc}{4R}}{\frac{a'b'c'}{4R}} = \frac{abc}{a'b'c'}$$

En la estructura geométrica que estamos considerando, los triángulos BCI y C’B’I son semejantes, pues los ángulos en I son iguales por opuestos por el vértice,



$\measuredangle IB'C' = \measuredangle BB'C' = \measuredangle BCC' = \measuredangle ICB'$

Así es

$$\frac{a}{a'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CI}{B'I}$$

Por una circularidad ,

$$\frac{b}{b'} = \frac{AI}{C'I} \;, \; \frac{c}{c'} = \frac{BI}{A'I}$$

$$\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = \frac{abc}{a'b'c'} = \frac{CI\ AI\ BI}{B'I\ C'I\ A'I} = \frac{CI\ AI/_{B'I}}{C'I\ A'I/_{BI}} = \frac{2r}{R}$$

$$, usando\ los\ apartados\ anteriores\ de\ este\ problema.$$

Ricardo Barroso Campos.

Director de trianguloscabri