

Problema 732 c)

Les bisectrius del triangle $\triangle ABC$ referides als vèrtexs A, B, C s'intersecten amb la circumferència circumscrita en els punts A_1, B_1, C_1 , respectivament. Siga I l'íncentre, R i r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita, respectivament. Proveu que

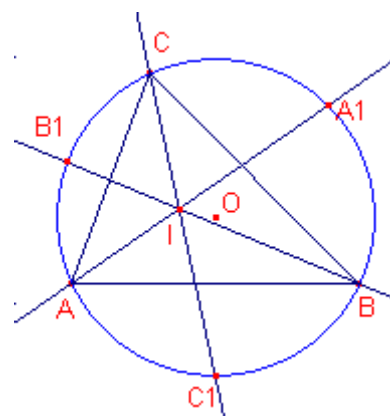
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{2r}{R}.$$

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Problema 732 (revista Ricardo Barroso)

Les bisectrius del triangle $\triangle ABC$ referides als vèrtexs A, B, C s'intersecten amb la circumferència circumscrita en els punts A_1, B_1, C_1 , respectivament. Siga I l'íncentre, R i r els radis de les circumferències circumscrita i inscrita, respectivament. Proveu que

$$a) \frac{\overline{IA_1} \cdot \overline{IC_1}}{\overline{IB}} = R. \quad b) \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} = 2r.$$



Siga $a_1 = \overline{B_1C_1}$, $b_1 = \overline{A_1C_1}$, $c_1 = \overline{B_1A_1}$.

$$\angle IAB = \frac{A}{2}, \quad \angle IBA = \frac{B}{2}, \quad \angle AIB = 90 + \frac{C}{2}.$$

$$\angle IA_1B_1 = \frac{B}{2}, \quad \angle IB_1A_1 = \frac{A}{2}, \quad \angle A_1IB_1 = 90 + \frac{C}{2}.$$

Els triangles $\triangle BIC$, $\triangle C_1IB_1$ són semblants i la raó de semblança és $\overline{IB} : \overline{IC_1}$. Aleshores,

$$\frac{a}{a_1} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}}.$$

$$\text{Anàlogament, } \frac{b}{b_1} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IA_1}}, \quad \frac{c}{c_1} = \frac{\overline{IA}}{\overline{IB_1}}.$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\frac{abc}{4R}}{\frac{a_1b_1c_1}{4R}} = \frac{abc}{a_1b_1c_1} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}} \cdot \frac{\overline{IC}}{\overline{IA_1}} \cdot \frac{\overline{IA}}{\overline{IB_1}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} \cdot \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1} \cdot \overline{IA_1}}.$$

Aplicant el resultat del problema 732 a) b):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IC}}{\overline{IB_1}} \cdot \frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1} \cdot \overline{IA_1}} = 2r \cdot \frac{1}{R} = \frac{2r}{R}.$$