Problema 732 c)

Las bisectrices del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ referentes a los vértices A, B y C se intersecan con la circunferencia circunscrita en los puntos A' B' y C'. Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente.
Probar que

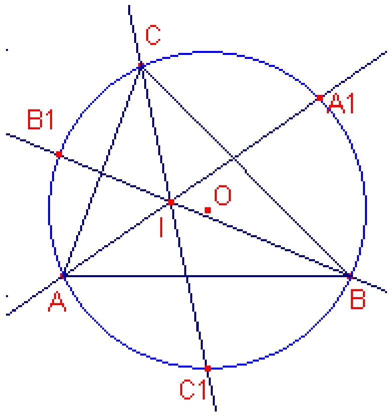
$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{2r}{R}.$$

Solució de Ricard Peiró i Estruch:

Problema 732 (revista Ricardo Barroso)

Las bisectrices del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ referentes a los vértices A, B y C se intersecan con la circunferencia circunscrita en los puntos A' B' y C'. Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente.
Probar que

a) $\dfrac{\overline{IA_1}\cdot\overline{IC_1}}{\overline{IB}}=R$. b) $\dfrac{\overline{IA}\cdot\overline{IC}}{\overline{IB_1}}=2r$.



Sea $a_1=\overline{B_1C_1}$, $b_1=\overline{A_1C_1}$, $c_1=\overline{B_1A_1}$.

$\angle IAB=\dfrac{A}{2}$, $\angle IBA=\dfrac{B}{2}$, $\angle AIB=90+\dfrac{C}{2}$.

$\angle IA_1B_1=\dfrac{B}{2}$, $\angle IB_1A_1=\dfrac{A}{2}$, $\angle A_1IB_1=90+\dfrac{C}{2}$.

Los triángulos $\overset{\Delta}{BIC}$, $\overset{\Delta}{C_1IB_1}$ son semejantes y la razón de semejanza es $\overline{IB}:\overline{IC_1}$. Entonces, $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}}$.

Análogamente, $\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{\overline{IC}}{\overline{IA_1}}$, $\dfrac{c}{c_1}=\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB_1}}$.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{\frac{abc}{4R}}{\frac{a_1b_1c_1}{4R}}=\frac{abc}{a_1b_1c_1}=\frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}}\frac{\overline{IC}}{\overline{IA_1}}\frac{\overline{IA}}{\overline{IB_1}}=\frac{\overline{IA}\cdot\overline{IC}}{\overline{IB_1}}\cdot\frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}\cdot\overline{IA_1}}.$$

Aplicando el resultado del problema 732 a) b):

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{\overline{IA}\cdot\overline{IC}}{\overline{IB_1}}\cdot\frac{\overline{IB}}{\overline{IC_1}\cdot\overline{IA_1}}=2r\frac{1}{R}=\frac{2r}{R}.$$