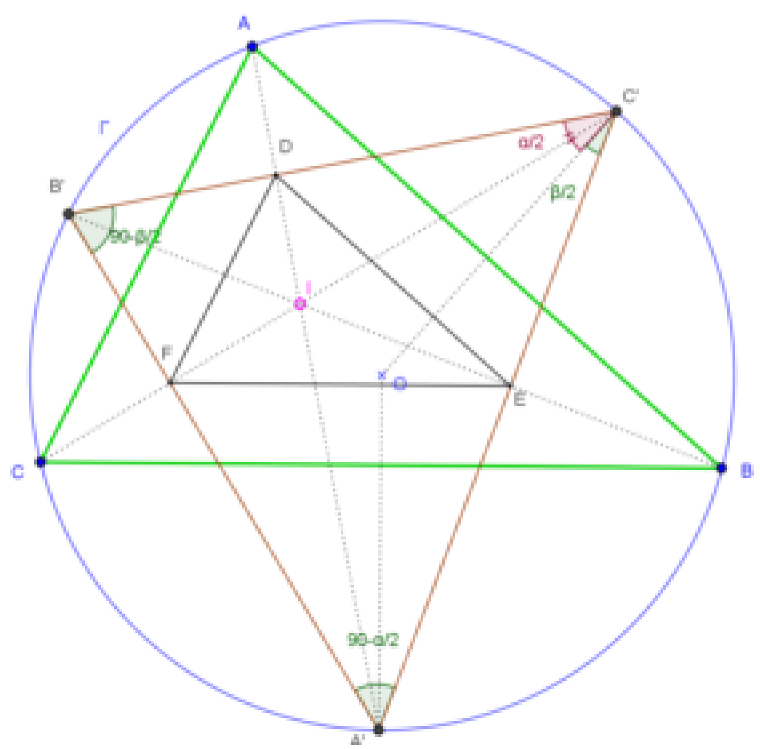
Problema 732 c. *- Las bisectrices del triángulo ABC referentes a los vértices A, B y C se intersecan con la circunferencia circunscrita en los puntos A' B' y C'.*

Sean R y r los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita, respectivamente.

Probar que $\frac{[ABC]}{[A'B'C']} = \frac{2r}{R}$.

Peiró, R. (2007): -Documento interno no publicado.



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca

Las mediatrices de ΔABC cortan a la circunferencia circunscrita en A', B', C', por tanto $OA' \perp BC$, de ahí $\measuredangle A'OC' = 180 - \beta$ y $\measuredangle A'C'O = \measuredangle OA'C' = \frac{\beta}{2}$.

Análogamente, $\measuredangle OC'B' = \frac{\alpha}{2}$ y por tanto, la suma, el ángulo $\measuredangle A'C'B' = 90 - \frac{\gamma}{2}$.

El área del triángulo $\Delta A'C'O$ es $[A'C'O] = \frac{R^2}{2} \cdot sen(180 - \beta) = \frac{R^2}{2} \cdot sen\beta = \frac{R^2}{2} \cdot \frac{b}{2R} = \frac{R}{4} \cdot b.$

Con esto el área del triángulo $\Delta A'B'C'$ es

$$[A'B'C'] = \frac{R}{4} \cdot (a + b + c) = \frac{R}{2} \cdot s = \frac{R}{2r} \cdot rs = \frac{R}{2r} \cdot [ABC]$$

que es lo que pretendíamos demostrar.

Nota.- Los ángulos de $A'B'C'$ son $90 - \frac{\alpha}{2}, 90 - \frac{\beta}{2}$ y $90 - \frac{\gamma}{2}$ respectivamente. Si E es el pie de la altura desde B', $\measuredangle CC'B' = \measuredangle CBB' = \frac{\beta}{2} = \measuredangle A'C'O$, por tanto OC' y CC' son isogonales para el triángulo $\Delta A'B'C'$. Como circuncentro y ortocentro son conjugados isogonales, entonces I es el ortocentro de este triángulo.

Además, el triángulo órtico de $A'B'C'$ tiene ángulos $\alpha'' = 180 - 2 \cdot \left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = \alpha$, $\beta'' = \beta$ y $\gamma'' = \gamma$, o sea, es semejante a ABC.

■