

Problema 732.-

Sea I el Incentro de ABC y sean A' B' C' las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita a ABC.

1.- Demostrar que $(IA'.IC')/IB = R$

2.- Demostrar que $(IA.IC)/IB' = 2r$

donde R es el Circunradio y r es el Inradio.

Prasolov V.V. (1986): *Problemas de planimetría (Moscú)*

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

A partir de la construcción enunciada, consideramos la potencia del punto I respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC.

En tal caso tenemos que $IA \cdot IA' = IB \cdot IB' = IC \cdot IC' = R^2 - IO^2$

Ahora bien, como $IO^2 = R^2 - 2Rr \rightarrow IA \cdot IA' = IB \cdot IB' = IC \cdot IC' = 2Rr$

Como tenemos que

$$IA = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}; IB = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}; IC = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}$$

podemos así obtener las siguientes relaciones $IA' = 2R \sin \frac{A}{2}; IB' = 2R \sin \frac{B}{2}; IC' = 2R \sin \frac{C}{2}$

En definitiva,

$$\frac{IA' \cdot IC'}{IB} = \frac{4R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{r}$$

A partir de la conocida relación:

$$\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}$$

deducimos que

$$\frac{IA' \cdot IC'}{IB} = \frac{4R^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{r} = \frac{4R^2}{r} \frac{r}{4R} = R \rightarrow$$

$$\frac{IA' \cdot IC'}{IB} = R \quad (I)$$

La otra relación surge de forma inmediata al observar que:

$$\frac{IA \cdot IC}{IB'} = \frac{IA \cdot IA'}{IA'} \frac{IC \cdot IC'}{IC'} \frac{IB}{IB \cdot IB'} = \frac{2Rr}{IA'} \frac{2Rr}{IC'} \frac{IB}{2Rr} = 2Rr \frac{IB}{IA' \cdot IC'} = 2Rr \frac{1}{R} = 2r \rightarrow$$

$$\frac{IA \cdot IC}{IB'} = 2r \quad (II)$$

Dedicado In Memoriam a D. Mauricio Contreras del Rincón.