

Dedicado In Memoriam a [Mauricio Contreras](#) a quien tuve el honor de conocer en Septiembre de 2005 en el IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). 7 - 10 de setiembre de 2.004 Universidad de Córdoba. También citó esta revista en su [web](#) a través de Ricard Peiró

Quincena del 1 al 15 de abril de 2015

Problema 732.

Problema 11.7 Sea I el incentro de ABC y sean $A' B' C'$ las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita a ABC .

1.- Demostrar que $(IA' IC')/IB = R$

2.- Demostrar que $(IA IC)/IB' = 2r$

Donde R es el circunradio y r es el inradio

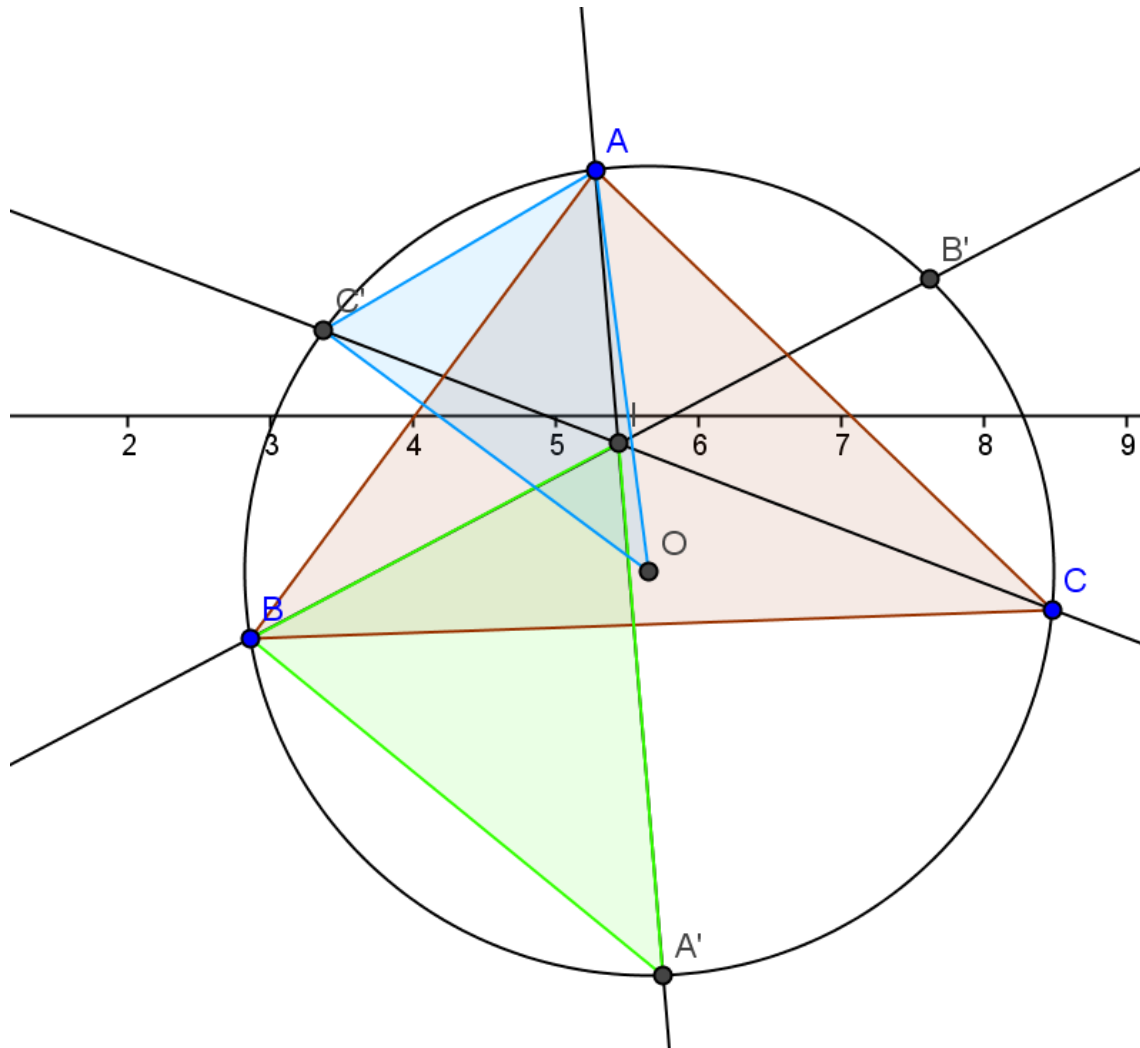
Prasolov. V.V.(1986) : Problemas de planimetría (Moscú)

Solución del director

1.- Demostrar que $(IA' IC')/IB = R$

Sean 2α , 2β y 2γ los ángulos de ABC .

Consideremos el triángulo $IA'B$.



Es $\angle IA'B = \angle AA'B = 2\gamma$

$\angle A'BI = \angle A'BC + \angle CBI = \angle AA'B = \alpha + \beta$. Así $IA'B$ es isósceles y $\angle BIA' = \alpha + \beta$

Es $\angle C'AI = \angle C'AB + \angle BAI = \gamma + \alpha$, $\angle AC'I = \angle AC'C = 2\beta$. Por lo que $AC'I$ es isósceles.

Sea O el circuncentro de ABC. Consideremos el triángulo $OC'A$.

Es $\angle C'OA = 2\angle C'CA = 2\gamma$

$OC'A$ es isósceles y $\angle OAC' = \angle OC'A = \alpha + \beta$

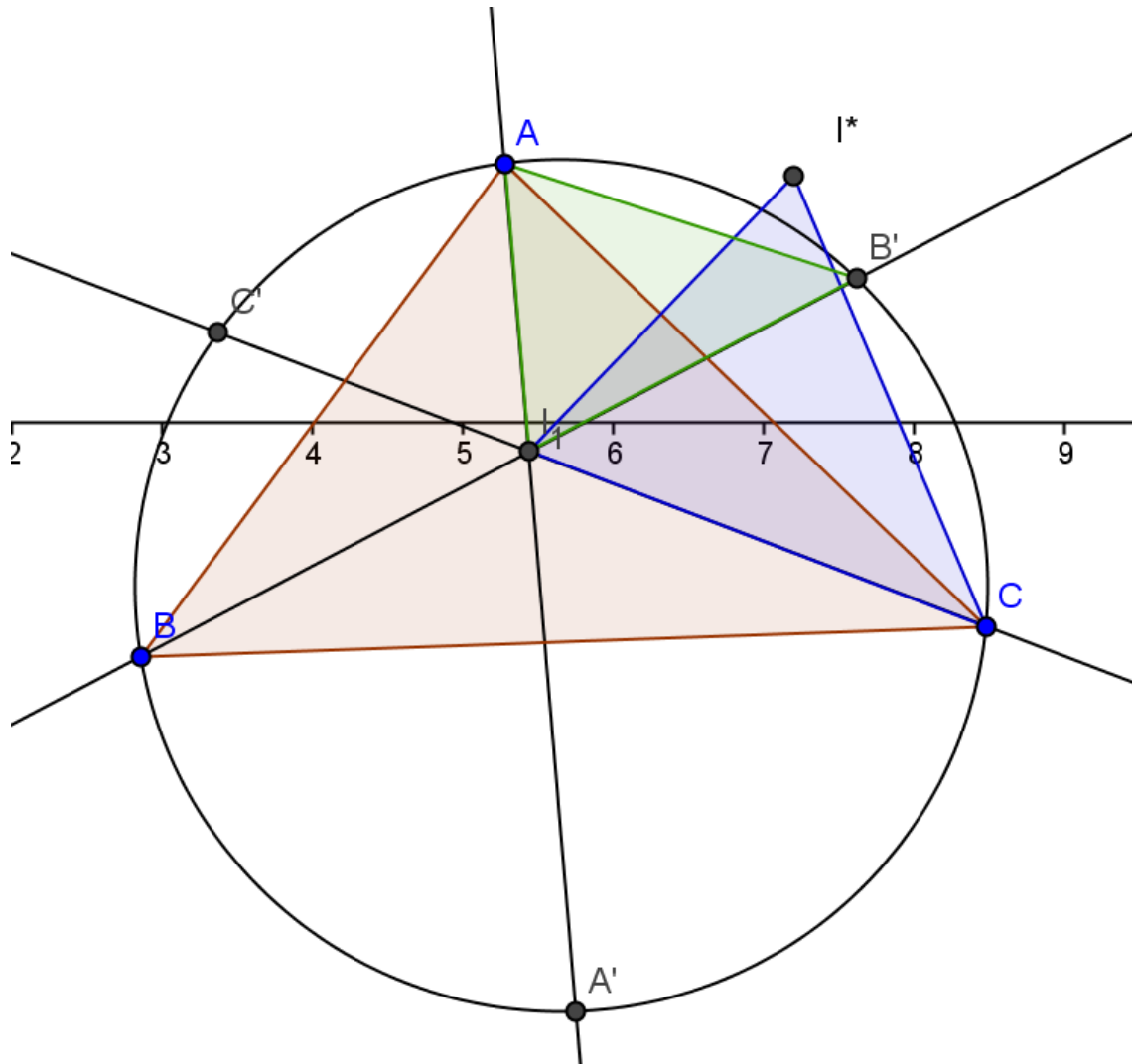
Es decir $C'OA$ y $IA'B$ son triángulos semejantes y, teniendo en cuenta que, dado que

$\angle AC'I = 2\beta$, y $\angle C'AI = \alpha + \gamma$, tenemos que $AC'I$ es isósceles, y por tanto, $C'A = C'B = C'I$.

Por ello

$$\frac{IA'}{IB} = \frac{C'O}{C'A} \rightarrow \frac{IA'}{IB} = \frac{R}{IC'} \rightarrow R = \frac{IA' \cdot IC'}{IB}, \text{ c.q.d.}$$

2.- Demostrar que $(IA \cdot IC) / IB' = 2r$



Consideremos el triángulo IAB'

$$\angle IAB' = \angle A'AC + \angle CAB' = \alpha + \beta. \angle AB'I = \angle AB'B = \angle ACB = 2\gamma$$

Así IAB' es isósceles.

Sea I* el simétrico de I respecto a AC.

Es II*=2r. El triángulo CII* es isósceles por construcción.

$$\angle ICI^* = 2\gamma. Y es \angle CII^* = \angle CI^*I = \alpha + \beta$$

Así los triángulos ICI* e I B'A son semejantes y se tiene:

$$\frac{IA}{IB'} = \frac{II^*}{IC} \rightarrow 2r = \frac{IA \cdot IC}{IB'}, \text{ c.q.d.}$$

Ricardo Barroso Campos.

Jubilado.

Sevilla.