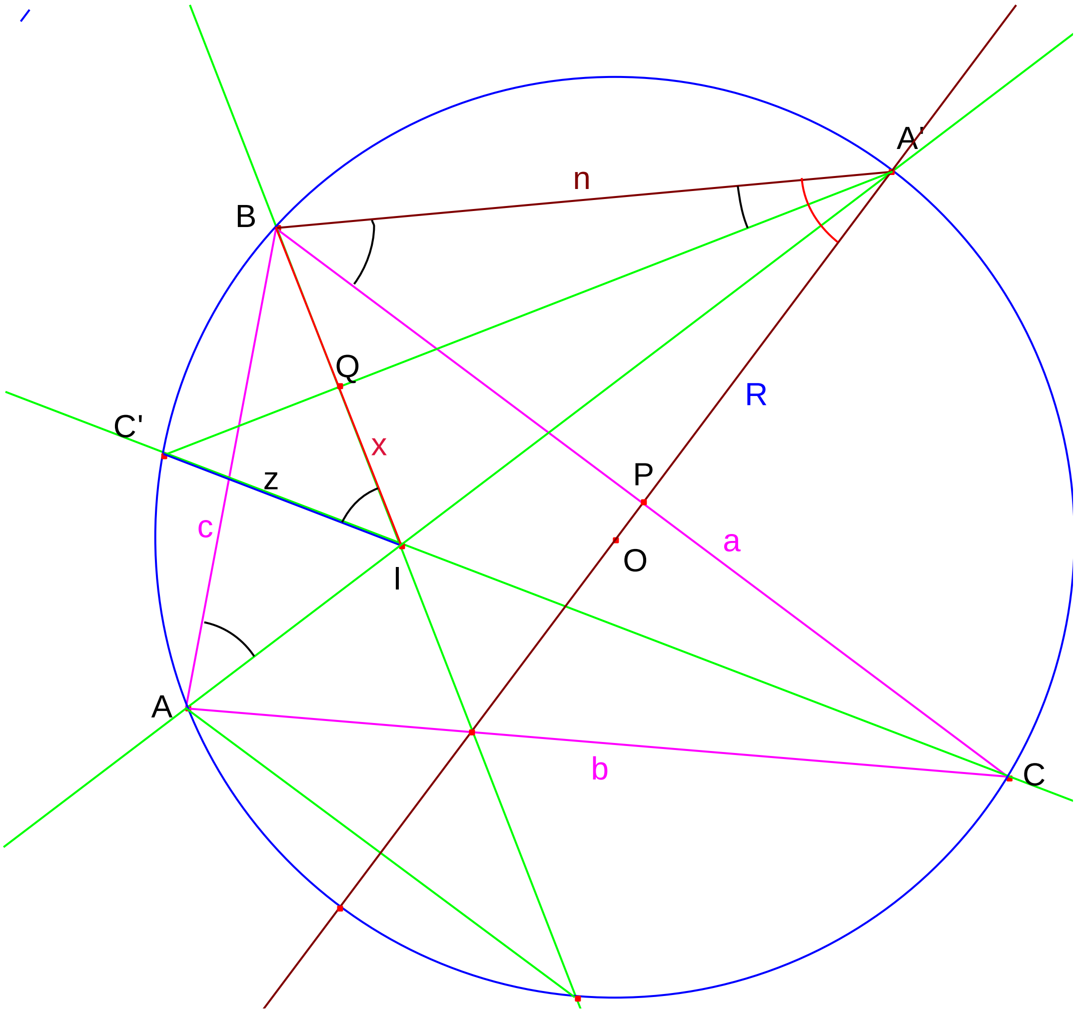
PROBLEMA 732

Sea I el incentro de ABC y sean A' B 'C' las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita ABC.

1. Demostrar que (IA'IC')/IB = R
2. Demostrar que (IAIC)/IB' = r

Donde R es el circunradio y r es el inradio

Demostración la Primera parte. Solución de Inocencio Esquivel García.



Para el triángulo ABC,

$$El\ teorema\ generalizado\ del\ seno\quad \frac{b}{\text{sen}B}=\frac{a}{\text{sen}A}=\frac{c}{\text{sen}C}=2R$$

Llamemos IB = x, IA' = n, IC' = z

El ángulo C y el ángulo BA'A subtienden el mismo arco, por tanto tienen igual medida.

Es decir que 2L = C.

$En\ el\ triángulo\ ABA'$ $\quad \frac{c}{sen(2L)} = \frac{n}{sen \propto} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{senC}}$

$$\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{senC}} = 2\mathrm{R} = \frac{n}{sen \propto} \quad \text{de donde } \mathbf{n = 2Rsen} \propto$$

El triángulo IA’B es isósceles, luego IA’ = n

Considerando que los triángulos C’QI y BPA’ son rectángulos; que el ángulo φ tiene igual medida que el ángulo θ, y que los triángulos BAA’ y A’BC tienen igual medida, se tiene

$$cos\varphi = \frac{x/2}{z} = \frac{x}{2z} \quad \cos\theta = sen\alpha = \frac{x}{2z}, \qquad de\ donde\ \boldsymbol{x = 2zsen\alpha}$$

$Remplazando\ los\ valores\ de\ x\ y\ de\ n, en\ la\ expresión\ \frac{nz}{x}\ se\ tiene$:

$$\frac{nz}{x} = \frac{2Rsen\alpha\ z}{2zsen\alpha} = R$$