

Problema 732

Siga I l' incentre del triangle $\triangle ABC$ i siguin A', B', C' les interseccions de les bisectrius amb la circumferència circumscrita a $\triangle ABC$.

Siguin R i r els radis de la circumferència circumscrita i inscrita, respectivament.

1.- Demostreu que $\frac{\overline{IA'} \cdot \overline{AC'}}{\overline{IB}} = R$.

2.- Demostreu que $\frac{\overline{IA} \cdot \overline{AC}}{\overline{IB'}} = 2r$.

Solució de Ricard Peiró i Estruch.

Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{AB}$.

$$\overline{IT} = r.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle ATI$:

$$\overline{AI} = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}}.$$

Anàlogament, $\overline{BI} = \frac{r}{\sin \frac{B}{2}}, \overline{CI} = \frac{r}{\sin \frac{C}{2}}.$

Aplicant la potència de I respecte de la circumferència circumscrita:

$$\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = R^2 - \overline{OI}^2.$$

Aplicant la nota 1: Teorema d'Euler:

$$\overline{IA} \cdot \overline{IA'} = 2Rr.$$

$$\overline{IA'} = 2R \frac{r}{\overline{AI}} = 2R \cdot \sin \frac{A}{2}.$$

Anàlogament, $\overline{IB'} = R \cdot \sin \frac{B}{2}, \overline{IC'} = R \cdot \sin \frac{C}{2}.$

$$\frac{\overline{IA'} \cdot \overline{AC'}}{\overline{IB}} = \frac{2R \cdot \sin \frac{A}{2} \cdot 2R \cdot \sin \frac{C}{2}}{\frac{r}{\sin \frac{B}{2}}} = \frac{4R^2}{r} \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}. \text{ Aplicant la nota 2:}$$

$$\frac{\overline{IA'} \cdot \overline{AC'}}{\overline{IB}} = R.$$

$$\frac{\overline{IA} \cdot \overline{AC}}{\overline{IB'}} = \frac{r}{\sin \frac{A}{2}} \cdot \frac{r}{\sin \frac{C}{2}} \cdot \frac{1}{2R \cdot \sin \frac{B}{2}} = 2r.$$

Nota 1: Teorema d'Euler: $\overline{OI}^2 = R(R - 2r).$

Nota 2: $\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}.$

