Problema 732.

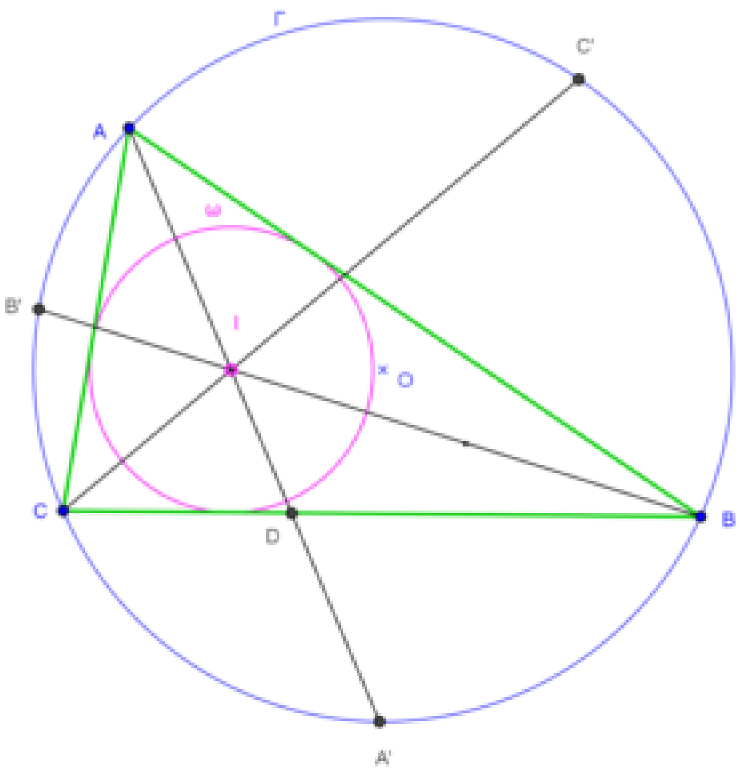
Problema 11.7. Sea I el incentro de ABC y sean A',B',C' las intersecciones de las bisectrices con la circunferencia circunscrita a ABC.

1.- Demostrar que $\frac{IA'\cdot IC'}{IB}=R$

2.- Demostrar que $\frac{IA\cdot IC}{IB'}=2r$

donde R es el cirunradio y r es el inradio.

Prasolov, V.V. (1986): Problemas de planimetría (Moscú)



Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Según el teorema de Euler la distancia entre el incentro y el circuncentro de un triángulo es $OI^2=R^2-2r\cdot R$ y por tanto la potencia (sin signo) del incentro respecto de la circunferencia circunscrita es $IA'\cdot IA=R^2-OI^2=2r\cdot R$.

Con esto podemos poner $\frac{IA'\cdot IC'}{IB}=\frac{(2rR)^2}{IA\cdot IB\cdot IC}=\frac{4r^2R}{IA\cdot IB\cdot IC}\cdot R$ y $\frac{IA\cdot IC}{IB'}=\frac{IA\cdot IB\cdot IC}{2rR}=\frac{IA\cdot IB\cdot IC}{4r^2R}\cdot 2r$.

Resumiendo: bastará demostrar que $\boxed{IA\cdot IB\cdot IC=4r^2R}$ y con esto concluirá el problema.

Del triángulo AIC se obtiene fácilmente $IA=\frac{r}{\operatorname{sen}{}^{\alpha}/_{2}}$ y expresando el radio r y el seno en función de los lados del triángulo se obtiene finalmente $IA=\sqrt{bc\cdot\frac{s-a}{s}}$, donde s es el semiperímetro del triángulo. Fórmulas análogas para los otros segmentos nos permiten escribir

$$IA\cdot IB\cdot IC=\frac{abc}{s}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\frac{abc}{s}\cdot r$$

Por otra parte el área del triángulo en función de los radios R y r puede expresarse como

$\Delta=rs=\frac{abc}{4R}$, de donde $abc=4rRs$.

Llevado a la expresión anterior obtenemos

$$IA\cdot IB\cdot IC=abc\cdot\frac{r}{s}=4rRs\cdot\frac{r}{s}=4r^2R$$

■