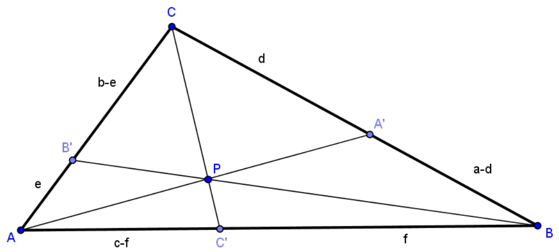
Solución al Problema 733 propuesto en Triángulos Cabri quincena del 16 al 30 de abril de 2015

enviada por
Andrea Fanchini
Cantú,
Italia.

Abril 18, 2015

Problema 733. *Bennet, G., Glenn, J. y Kimberling, C. (1986).*
E 3155. Demostrar que para cualquier triángulo ABC existen puntos A', B' y C' que satisfacen:
1) A' está en el lado BC, B' en AC y C' en AB.
2) $A'C + CB' = B'A + AC' = C'B + BA'$;
3) AA', BB', y CC' concurren en un punto.
The American Mathematical Monthly,Vol. 93, No. 6 (Jun. - Jul.), pp. 481-482

Solución 733. *(Andrea Fanchini, Cantú, Italia)*



Usando coordenadas baricéntricas y con referencia a la figura, los puntos A', B' y C' son

$$A'(0 : d : a-d), \qquad B'(b-e : 0 : e), \qquad C'(f : c-f : 0)$$

entonces las rectas AA', BB' y CC' tienen ecuaciones

$$AA' \equiv (d-a)y + dz = 0, \qquad BB' \equiv ex + (e-b)z = 0, \qquad CC' \equiv (f-c)x + fy = 0$$

y son concurrentes si y sólo si el determinante formado por sus coeficientes se anula

$$\begin{vmatrix} 0 & d-a & d \\ e & 0 & e-b \\ f-c & f & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sustrayendo las filas en este modo $I^a - II^a$, $II^a - III^a$ y $III^a - I^a$, se tiene

$$\begin{vmatrix} 0 & d-a & d \\ e & 0 & e-b \\ f-c & f & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e & d-a & d+b-e \\ e+c-f & -f & e-b \\ f-c & f+a-d & -d \end{vmatrix}$$

ahora del punto dos del problema tenemos que

$$d+b-e = e+c-f = f+a-d = k$$

por tanto

$$\begin{vmatrix} -e & d-a & d+b-e \\ e+c-f & -f & e-b \\ f-c & f+a-d & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e & d-a & k \\ k & -f & e-b \\ f-c & k & -d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e & f-k & k \\ k & -f & d-k \\ e-k & k & -d \end{vmatrix} = 0, \quad q.e.d.$$

ya que, por ejemplo, la primera fila es la suma de las otras dos, las tres rectas son concurrentes.