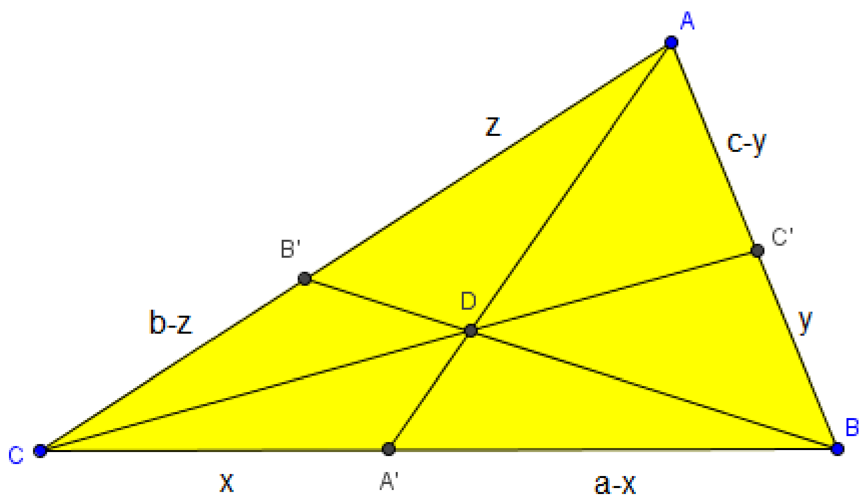
Problema 733.-

Demostrar que para cualquier triángulo ABC existen puntos A' B' y C' que satisfacen:
1) A' está en el lado BC, B' en AC y C' en AB.
2) A'C + CB' = B'A + AC' = C'B + BA';
3) AA', BB', y CC' concurren en un punto.

Bennet, G., Glenn, J. y Kimberling, C. (1986).
The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 6 (Jun. - Jul.), pp. 481-482

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Consideramos en general un triángulo ABC.



Utilizando el programa Mathematica, resolvemos el sistema que proporciona las condiciones de la igualdad en la suma de segmentos (Sistema Compatible Indeterminado) y luego exigiendo que se verifique el Teorema de Ceva, obtenemos:

$$\text{Solve}\left[\left\{a-x+y==\frac{1}{3}(a+b+c),\ c-y+z==\frac{1}{3}(a+b+c),\ b-z+x==\frac{1}{3}(a+b+c)\right\},\ \{x,y,z\}\right]$$

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{3}(a-2b+c)+z,\ y\to\frac{1}{3}(-a-b+2c)+z\right\}\right\}$$

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{3}(a-2b+c)+t,\ y\to\frac{1}{3}(-a-b+2c)+t,\ z\to t\right\}\right\}$$

$$\frac{x}{a-x}\,\frac{y}{c-y}\,\frac{t}{b-t}==1\ /.\ \left\{\left\{x\to\frac{1}{3}(a-2b+c)+t,\ y\to\frac{1}{3}(-a-b+2c)+t\right\}\right\}$$

$$\left\{\frac{t\left(\frac{1}{3}(a-2b+c)+t\right)\left(\frac{1}{3}(-a-b+2c)+t\right)}{(b-t)\left(a+\frac{1}{3}(-a+2b-c)-t\right)\left(\frac{1}{3}(a+b-2c)+c-t\right)}==1\right\}$$

$$t\left(\frac{1}{3}(a-2b+c)+t\right)\left(\frac{1}{3}(-a-b+2c)+t\right)-(b-t)\left(a+\frac{1}{3}(-a+2b-c)-t\right)\left(\frac{1}{3}(a+b-2c)+c-t\right)\ //\ \text{Expand}$$

$$-\frac{2a^2b}{9}-\frac{4ab^2}{9}-\frac{2b^3}{9}-\frac{abc}{9}-\frac{b^2c}{9}+\frac{bc^2}{9}+\frac{a^2t}{9}+\frac{14abt}{9}+\frac{13b^2t}{9}+\frac{2act}{9}-\frac{4bct}{9}+\frac{c^2t}{9}-at^2-3bt^2+ct^2+2t^3$$

$$-\frac{2a^2b}{9}-\frac{4ab^2}{9}-\frac{2b^3}{9}-\frac{abc}{9}-\frac{b^2c}{9}+\frac{bc^2}{9}+\frac{a^2t}{9}+\frac{14abt}{9}+\frac{13b^2t}{9}+\frac{2act}{9}-\frac{4bct}{9}+\frac{c^2t}{9}-at^2-3bt^2+ct^2+2t^3\ /.\ t\to bk\ //\ \text{Expand}$$

$$-\frac{2a^2b}{9}-\frac{4ab^2}{9}-\frac{2b^3}{9}-\frac{abc}{9}-\frac{b^2c}{9}+\frac{bc^2}{9}+\frac{1}{9}a^2bk+\frac{14}{9}ab^2k+\frac{13b^3k}{9}+\frac{2}{9}abck-\frac{4}{9}b^2ck+\frac{1}{9}bc^2k-ab^2k^2-3b^3k^2+b^2ck^2+2b^3k^3$$

En esta expresión obtenida en función de k, siendo $0 \leq k \leq 1$, podemos definir la función $y = f(k)$ y comprobando que f(0)<0 y f(1)>0→ Existe un valor de k', tal que f(k')=0. Lo que significa que existen puntos A' B' y C' que satisfacen las condiciones del enunciado dado.

$$f[k\_] := -\frac{2\,a^2\,b}{9} - \frac{4\,a\,b^2}{9} - \frac{2\,b^3}{9} - \frac{a\,b\,c}{9} - \frac{b^2\,c}{9} + \frac{b\,c^2}{9} + \frac{1}{9}\,a^2\,b\,k + \frac{14}{9}\,a\,b^2\,k + \frac{13\,b^3\,k}{9} + \frac{2}{9}\,a\,b\,c\,k - \frac{4}{9}\,b^2\,c\,k + \frac{1}{9}\,b\,c^2\,k - a\,b^2\,k^2 - 3\,b^3\,k^2 + b^2\,c\,k^2 + 2\,b^3\,k^3$$

$$f[0] = -\frac{2\,a^2\,b}{9} - \frac{4\,a\,b^2}{9} - \frac{2\,b^3}{9} - \frac{a\,b\,c}{9} - \frac{b^2\,c}{9} + \frac{b\,c^2}{9}$$

f[0] // Factor

$$-\frac{1}{9}\,b\,(2\,a + 2\,b - c)\,(a + b + c) < 0$$

$f[0] < 0$

$$f[1] = -\frac{a^2\,b}{9} + \frac{a\,b^2}{9} + \frac{2\,b^3}{9} + \frac{a\,b\,c}{9} + \frac{4\,b^2\,c}{9} + \frac{2\,b\,c^2}{9}$$

f[1] // Factor

$$-\frac{1}{9}\,b\,(a - 2\,b - 2\,c)\,(a + b + c)$$

$f[1] > 0$