Problema 733.-

E 3155. Demostrar que para cualquier triángulo ABC existen puntos A' B' y C' que satisfacen:

1) A' está en el lado BC, B' en AC y C' en AB.

2) A'C + CB' = B'A + AC' = C'B + BA';

3) AA', BB', y CC' concurren en un punto.

Bennet, G., Glenn, J. y Kimberling, C. (1986): The American Mathematical Monthly,Vol. 93, No. 6 (Jun. - Jul.), pp. 481-482.

Solución del director.

El perímetro del triángulo es dividido por A’ B’ y C’ de manera que

A'C + CB' = B'A + AC' = C'B + BA' = 1/3 (a+b+c).

Consideremos varios casos.

En primer lugar el triángulo en que los lados sean iguales al tercio.

Se trata del equilátero

Sea a=b=c=1, sin pérdida de generalidad.

Sean puntos P Q y R sobre AB, BC y CA de manera que cumplan 2):

Siendo 0<r<1, es AP=r, PB=1-r, BQ=r, QC=1-r, CR=r, RA=1-r.

Para que se verfique 3), por Ceva debe ser :

r r r =(1-r) (1-r) (1-r)

$2 r^3 -3 r^2 + 3 r - 1=0$

Que es resuelta por r=1/2 , y dos raíces complejas que aunque resuelvan la ecuación , no resuelven nuestro problema.

Así A’ B’ C’ son los puntos medios y el punto de concurrencia pedido es el baricentro,, etc de esta triángulo inicial estudiado.

Sea el caso de que un lado coincida con el tercio del perímetro.

Si otro lado también coincidiese con el tercio tendríamos de nuevo el equilátero, por lo que para el estudio que realizamos ha de ser que los otros dos lados sean diferentes y necesariamente uno mayor y otro menor.

Sean pues, sin pérdida de generalidad

a=1, b=1+q, c=1-q, con q<1.

Debemos tomar de nuevo puntos P Q y R sobre AB, BC y CA de manera que cumplan 2):

Para garantizar que se cumpla 2) en este caso tomaremos al principio o Q o P, ya que si tomamos R podemos tener P o Q sobre CA, lo que no es deseable.

Sea pues Q sobre BC tal que

BQ=r, CQ= 1-r, con 0<r<1

BP= 1-r, AP= r – q

CR=r, AR= 1+q-r

Lo que da lugar aplicando Ceva a una ecuación cúbica:

(1-r) (1-r)(1+q-r)=r r (r-q)

Desarrollando tenemos:

$-2r^3 + r^2 (2q+3) + r(-2q-3)+1=0$

Es inmediato que tiene una raíz real m que debe estar entre 0 y 1, y otras dos raíces que pueden ser reales o complejas.

Así tenemos demostrada la existencia de A' B' C' y concurrencia de AA' BB' CC' pedida.

En un triángulo general, no equilátero, ni isósceles a, b , c.

Uno de los lados ha de ser necesariamente menor que un tercio del perímetro, pues si los tres fuesen mayores que un tercio su suma sería mayor que el perímetro.

Sea por ejemplo 3 el perímetro, y a , b 3-a-b sus tres lados.

Supongamos b el menor.

Tomemos un punto M sobre AC tal que: AM=*u*, CM=*b-u*.

Debe ser 0<u<b

Sea P sobre BC tal que $CP = 1 + u - b \rightarrow BP = a + b - 1 - u$

Y por último, sea Q sobre AB, con $AQ = 1 - u, y\ BQ = 2 - a - b + u$

Es inmediato que para cualquier punto M existen los correspondientes P y Q.

Por el inverso del teorema de Ceva, para hallar A'B' y C' debemos considerar la ecuación:

(b-u) ($a + b - 1 - u$) $(1 - u)$ = u (1+$u - b$)($2 - a - b + u$)

Se observa que tenemos una ecuación cúbica en u ,

$-2u^3 + 3u^2 + (-2b^2 + 2b - 2ab - 1)u + (b^2 - b + ab)$

que como es sabido tiene bien una solución real y dos complejas o tres soluciones reales, lo que nos solucionaría el problema.

Dado que la expresión que se desarrolla es muy intrincada, propongo dos casos concretos para observar el desarrollo.

1.- Sea ABC con b=4, a=10, c=7. (a+b+c)/3 =7

Es MC=u, AM=4-u.

AQ=u+3, QB=4-u,

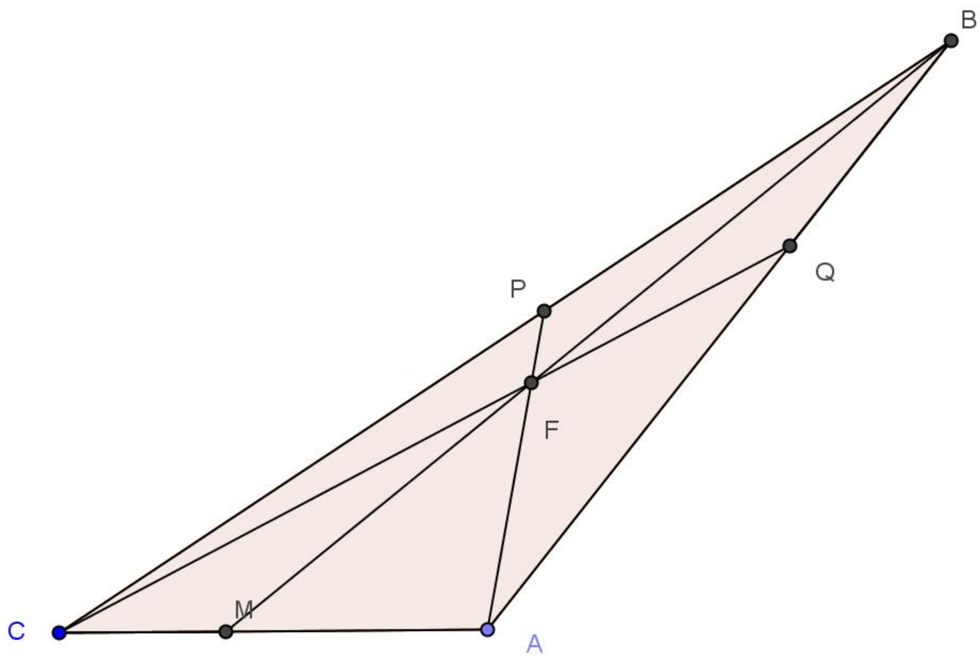
BP=u+3, PC=7-u,

Que dan como ecuación cúbica:

$u\ (u+3)(u+3) = (4-u)(4-u)(7-u)$

$u^3+6u^2+9u= (u^2 – 8\ u+ 16)(7-u)$

$2u^3 -9u^2+81\ u – 112=0$



Da lugar a u=CM = 1.559, y otras dos soluciones complejas:

u= 1.470 + i * 5.810, u= 1.470 - i * 5.810.

Así AM=2.441..

2.- Sea a=10, b=5, c=9

La aplicación del teorema de Ceva da lugar a:

$m\ (m+3)(m+2)=(5-m)(6-m)(8-m)$

Lo que lleva a

$m^3- 7\ m^2 + 62\ m – 120=0$

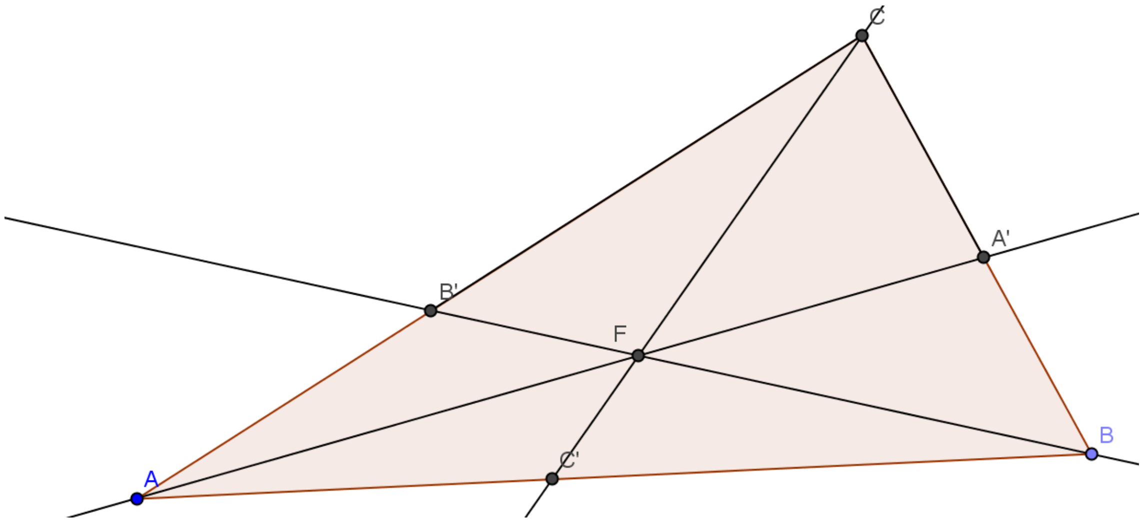
cuyas soluciones usando un sistema de cálculo simbólico, m≈2.3496

$x \approx 2.3252 + 6.7577\, i$

m≈ 2.3252 + 6.7577 i

m≈ 2.3252 - 6.7577 i.

El valor que nos interesa es el real.



Ricardo Barroso Campos. Jubilado.

Sevilla. España