

Problema 733.

Demostreu que per qualsevol triangle $\triangle ABC$ existeixen punts A' , B' , C' que satisfan:

1. A' està en el costat $\overline{BC}$, B' en $\overline{AC}$ i C' en $\overline{AB}$.

2.- $\overline{A'C} + \overline{CB'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = \overline{C'B} + \overline{BA'}$.

3.- $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ concorren en un punt.

Solució de Ricard Peiró:

Si $\overline{A'C} + \overline{CB'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = \overline{C'B} + \overline{BA'}$, aleshores,

$$3(\overline{A'C} + \overline{CB'}) = \overline{A'C} + \overline{CB'} + \overline{B'A} + \overline{AC'} + \overline{C'B} + \overline{BA'} = a + b + c.$$

Per tant, $\overline{A'C} + \overline{CB'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = \overline{C'B} + \overline{BA'} = \frac{1}{3}(a + b + c).$

Siga $\overline{BC'} = x$, aleshores:

$$\overline{AC'} = c - x. \quad \overline{BA'} = \frac{a + b + c}{3} - x. \quad \overline{CA'} = \frac{2a - b - c}{3} + x.$$

$$\overline{AB'} = \frac{a + b - 2c}{3} + x. \quad \overline{CB'} = \frac{-a + 2b + 2c}{3} - x.$$

A fi que els segments $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ siguin concurrents, s'ha d'acomplir el teorema de Ceva:

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} = 1, \text{ és a dir, } \overline{BC'} \cdot \overline{AB'} \cdot \overline{CA'} = \overline{AC'} \cdot \overline{CB'} \cdot \overline{BA'}.$$

$$x \left(\frac{a + b - 2c}{3} + x \right) \left(\frac{2a - b - c}{3} + x \right) = (c - x) \left(\frac{-a + 2b + 2c}{3} - x \right) \left(\frac{a + b + c}{3} - x \right).$$

Desenvolupant i igualant a zero:

$$2x^3 + (a - b - 3c)x^2 + \left(\frac{(a + b + c)(-a + 2b + 5c)}{9} + \frac{(a + b - 2c)(2a - b - c)}{9} + \frac{c(-a + 2b + 2c)}{3} \right)x - \frac{c(a + b + c)(-a + 2b + 2c)}{9} = 0$$

Vegem que l'equació té una solució entre $[0, c]$.

Considerem la funció:

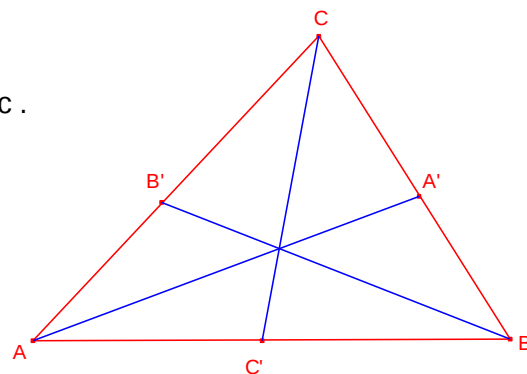
$$f(x) = 2x^3 + (a - b - 3c)x^2 + \left(\frac{(a + b + c)(-a + 2b + 5c)}{9} + \frac{(a + b - 2c)(2a - b - c)}{9} + \frac{c(-a + 2b + 2c)}{3} \right)x - \frac{c(a + b + c)(-a + 2b + 2c)}{9}$$

$$f(0) = -c \frac{(a + b + c)(-a + 2b + 2c)}{9} < 0.$$

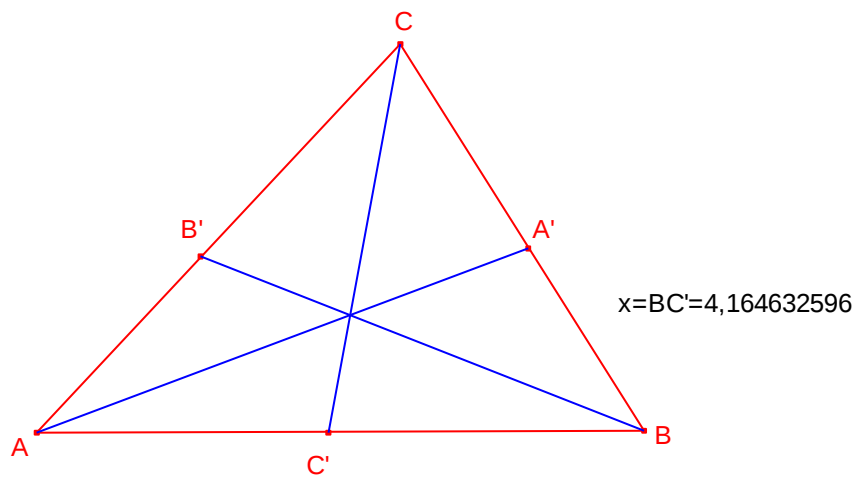
$$f(c) = c \frac{(a + b + c)(2a - b + 2c)}{9} > 0.$$

Com que la funció és contínua, la funció té un zero en l'interval $[0, c]$.

Nota: Si els costats són nombres reals coneguts, amb qualsevol programa informàtic o bé amb la calculadora resoldríem l'equació de tercer grau que ens donaria la solució.



Exemple:



Si $a = 6, b = 7, c = 8$.

L'equació és:

$$2x^3 - 25x^2 + 177x - 448 = 0.$$

La solució aproximada és:

$$x = \overline{BC'} = 4,164632596.$$