

Problema 733.

E 3155. Demostrar que para cualquier triángulo  $\triangle ABC$  existen puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  que satisfacen:

1.  $A'$  está en el lado  $\overline{BC}$ ,  $B'$  en  $\overline{AC}$  y  $C'$  en  $\overline{AB}$ .
- 2.-  $\overline{A'C} + \overline{CB'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = \overline{C'B} + \overline{BA'}$ .
- 3.-  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  concurren en un punto.

Bennet, G., Glenn, J. y Kimberling, C. (1986): The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 6 (Jun. - Jul.), pp. 481-482

[Clark Kimberling](#) mantiene la

Solución de Ricard Peiró:

Si  $\overline{A'C} + \overline{CB'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = \overline{C'B} + \overline{BA'}$ , entonces,

$$3(\overline{A'C} + \overline{CB'}) = \overline{A'C} + \overline{CB'} + \overline{B'A} + \overline{AC'} + \overline{C'B} + \overline{BA'} = a + b + c.$$

$$\text{Per tant, } \overline{A'C} + \overline{CB'} = \overline{B'A} + \overline{AC'} = \overline{C'B} + \overline{BA'} = \frac{1}{3}(a + b + c).$$

Sea  $\overline{BC'} = x$ , entonces:

$$\overline{AC'} = c - x. \quad \overline{BA'} = \frac{a + b + c}{3} - x. \quad \overline{CA'} = \frac{2a - b - c}{3} + x.$$

$$\overline{AB'} = \frac{a + b - 2c}{3} + x. \quad \overline{CB'} = \frac{-a + 2b + 2c}{3} - x.$$

Para que los segmentos  $\overline{AA'}$ ,  $\overline{BB'}$ ,  $\overline{CC'}$  sean concurrentes, se tiene que cumplir el teorema de Ceva:

$$\frac{\overline{BC'}}{\overline{AC'}} \cdot \frac{\overline{AB'}}{\overline{CB'}} \cdot \frac{\overline{CA'}}{\overline{BA'}} = 1, \text{ es decir, } \overline{BC'} \cdot \overline{AB'} \cdot \overline{CA'} = \overline{AC'} \cdot \overline{CB'} \cdot \overline{BA'}.$$

$$x \left( \frac{a + b - 2c}{3} + x \right) \left( \frac{2a - b - c}{3} + x \right) = (c - x) \left( \frac{-a + 2b + 2c}{3} - x \right) \left( \frac{a + b + c}{3} - x \right).$$

Desarrollando e igualando a cero:

$$2x^3 + (a - b - 3c)x^2 + \left( \frac{(a + b + c)(-a + 2b + 5c)}{9} + \frac{(a + b - 2c)(2a - b - c)}{9} + \frac{c(-a + 2b + 2c)}{3} \right)x - \frac{c(a + b + c)(-a + 2b + 2c)}{9} = 0$$

Veamos que la ecuación tiene una solución entre  $[0, c]$ .

Consideremos la función:

$$f(x) = 2x^3 + (a - b - 3c)x^2 + \left( \frac{(a + b + c)(-a + 2b + 5c)}{9} + \frac{(a + b - 2c)(2a - b - c)}{9} + \frac{c(-a + 2b + 2c)}{3} \right)x - \frac{c(a + b + c)(-a + 2b + 2c)}{9}$$

$$f(0) = -c \frac{(a + b + c)(-a + 2b + 2c)}{9} < 0.$$

$$f(c) = c \frac{(a + b + c)(2a - b + 2c)}{9} > 0.$$



