

Problema 733.

Démontrer que pour tout triangle ABC existent des points A' , B' et C' qui satisfont :

- 1) A' est sur le côté BC , B' sur AC et C' sur AB .
- 2) $A'C + CB' = B'A + AC' = C'B + BA'$;
- 3) AA' , BB' , et CC' concourent en un point.

Bennett G., Glenn J. et Kimberling, C. (1986): The American Mathematical Monthly, Vol. 93, No. 6 (Jun. - Jul.), E 3155. pp. 481-482

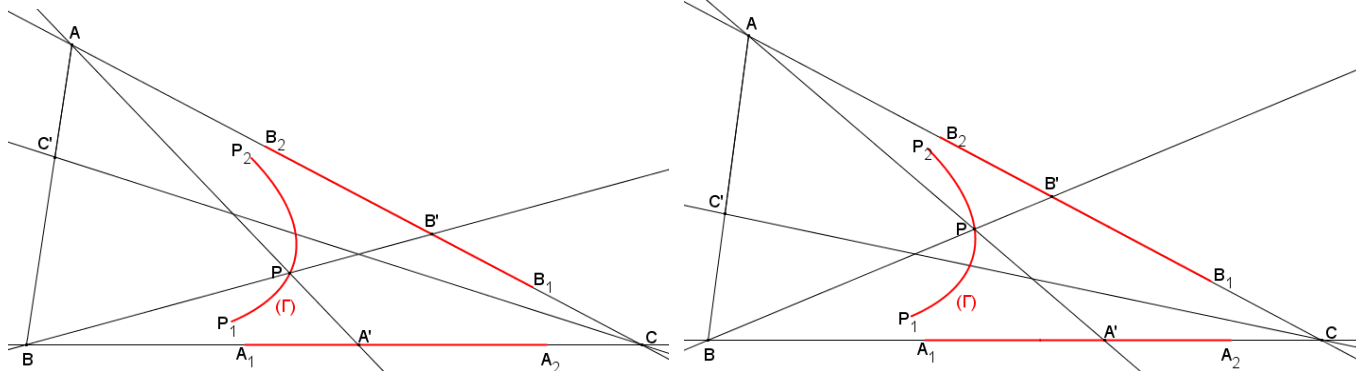
Solutions proposées par Philippe Fondanaiche

1^{ère} solution

On désigne par a, b et c les longueurs des côtés BC, CA et AB du triangle ABC de périmètre $p = a + b + c$.

Par hypothèse, les points A', B' et C' sont placés respectivement sur les côtés BC, CA et AB de sorte que $A'C + CB' = B'A + AC' = C'B + BA' = p/3$

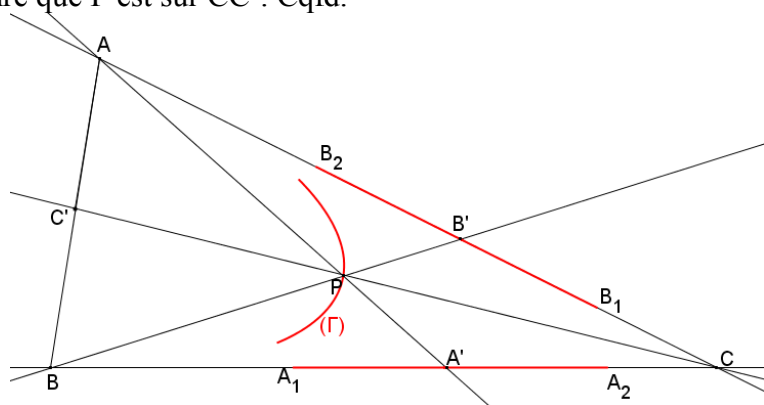
Sans perte de généralité, on considère que AB est le plus petit côté du triangle ABC . Il existe toujours un intervalle (I) de AB , éventuellement confondu avec AB , tel que pour tout point C' de (I) , on sait construire A' sur BC tel que $C'B + BA' = p/3 < p/2 < AB + BC$ puis B' sur AC tel que $C'A + AB' = p/3 < p/2 < BA + AC$.



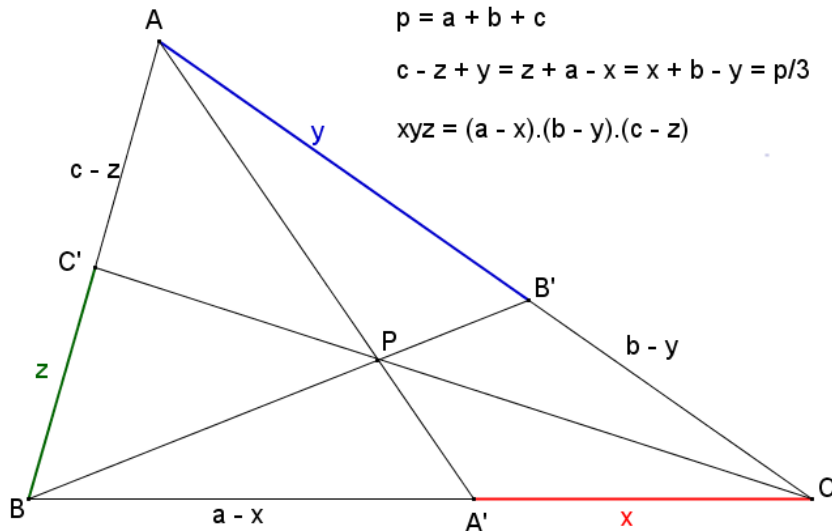
Quand C' décrit l'intervalle (I) , les lieux de A' et de B' sont respectivement le segment de droite A_1A_2 sur BC et le segment de droite B_1B_2 sur AC . Soit P le point d'intersection de AA' et de BB' . Le lieu de P est une courbe continue (Γ) ayant pour extrémités P_1 et P_2 , avec P en P_1 quand A' est en A_1 et B' est en B_1 et P en P_2 quand A' est en A_2 et B' est en B_2 .

Quand C' est en A ou le plus proche possible de A , le point P est du même côté que B par rapport à CC' . De la même manière, quand C' est en B ou le plus proche possible de B , le point P est du même côté que A par rapport à CC' (voir les deux figures supra).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_des_valeurs_intermédiaires (appelé encore théorème de Bolzano), il en découle que lorsque C' décrit la totalité de l'intervalle (I) , il existe au moins une position de C' telle que P est en même temps du même côté que A et B par rapport à CC' , c'est à dire que P est sur CC' . Cqfd.



2^{ème} solution



Avec les mêmes notations a, b, c et p que précédemment, on désigne par x, y et z les longueurs des segments CA' , AB' et BC' . On en déduit $BA' = a - x$ puis $CB' = b - y$ et $AC' = c - z$.

Quel que soit le triangle ABC , on sait toujours trouver sur le plus petit côté (AB sans perte de généralité) un intervalle (I) tel que pour tout point C' de cet intervalle, on sait construire A' sur BC et B' sur AC tels que : $c - z + y = z + a - x = x + b - y = p/3$.

A partir de ces relations, on déduit $y = x + b - p/3$ et $z = x - a + p/3$.

D'après le **théorème de Ceva**, http://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Ceva, les trois céviennes AA' , BB' et CC' sont concourantes en un point P si et seulement si $xyz = (a - x).(b - y).(c - z)$.

En remplaçant y et z dans cette dernière équation par leurs expressions en fonction de x , on obtient une équation $f(x) = 0$ qui est du troisième degré en x et dont le coefficient de x^3 est non nul.

On vérifie aisément que lorsque A' est proche de B , B' proche de C et C' proche de A , le produit xyz est supérieur à $(a - x).(b - y).(c - z)$. A contrario, lorsque A' est proche de C , B' proche de A et C' proche de B , le produit xyz est inférieur à $(a - x).(b - y).(c - z)$. La courbe représentative de $f(x)$ traverse donc l'axe des abscisses en au moins un point, ce qui confirme l'existence d'au moins un triplet de points A', B' et C' qui respectent les conditions de l'énoncé. Cqfd.