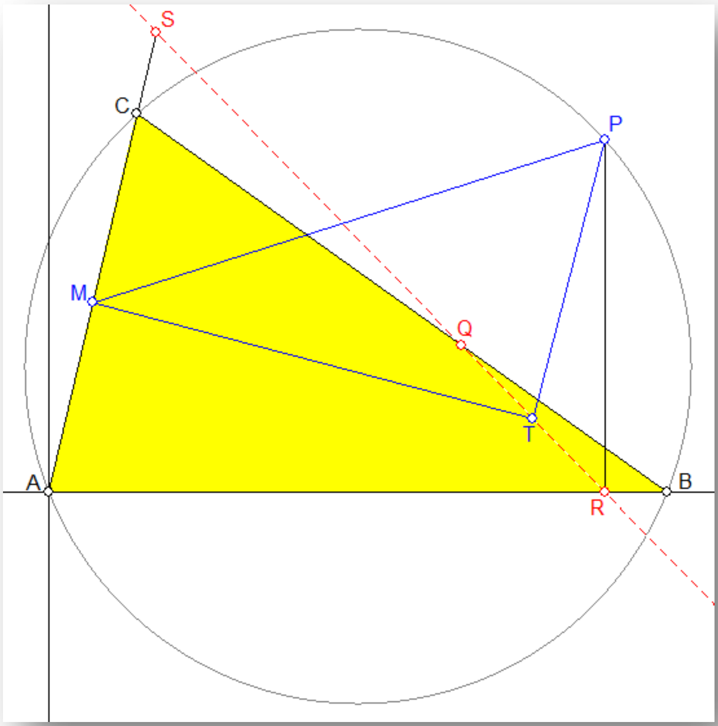
Problema 734.-
Elementos de un triángulo.
Sea ABC un triángulo.
P un punto de la circunferencia circunscrita de ABC, del arco BC que no contiene a A.
Sean Q la proyección de P sobre BC y R la proyección de P sobre AB.
Sea T el punto medio de QR y sea M el punto medio de AC.
Demostrar que el ángulo PTM es recto

Akopyan A. (2011): Geometry in Figures.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Según el enunciado, la recta QR es la Recta de Simson asociada al punto P respecto del triángulo ABC dado.



Sea además el punto S, la proyección de P sobre AC.

Consideramos el sistema de referencia cartesiano por el que las coordenadas de los puntos de la figura son los siguientes:

$P = (p, q),\ A = (0,0),$

$B = (b, 0)\ y\ C = (c_1, c_2)$

$Q = (q_1, q_2), R = (p, 0)$

Se obtiene fácilmente que:

$$q_1 = \frac{p(c_1 - b)^2 + bc_2{}^2 + qc_2(c_1 - b)}{(c_1 - b)^2 + c_2{}^2}, \qquad q_2 = \frac{-bc_2(c_1 - b) + qc_2{}^2 + pc_2(c_1 - b)}{(c_1 - b)^2 + c_2{}^2}$$

La circunferencia circunscrita al triángulo ABC, de centro O y radio r.

$$O = \left(\frac{b}{2}, \frac{c_1{}^2 + c_2{}^2 - bc_1}{2c_2}\right)$$

$$r^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_1{}^2 + c_2{}^2 - bc_1}{2c_2}\right)^2$$

Como $P = (p, q)$ pertenece a dicha circunferencia, se verificará la relación:

$$bqc_1 - qc_1^2 - bpc_2 + p^2c_2 + q^2c_2 - qc_2^2 = 0 \quad \text{(I)}$$

Los puntos M y T, puntos medios de AC y QR, respectivamente, tendrán de coordenadas:

$$M = \left(\frac{c_1}{2}, \frac{c_2}{2}\right) \text{ y}$$

$$\mathrm{T} = \left(\frac{2b^2p - 4bpc_1 + 2pc_1^2 - bqc_2 + qc_1c_2 + bc_2^2 + pc_2{}^2}{2((-b + c_1)^2 + c_2^2)}, \frac{-b(-b + c_1)c_2 + p(-b + c_1)c_2 + qc_2^2}{2((-b + c_1)^2 + c_2^2)}\right)$$

Por tanto,

$$\overrightarrow{\mathrm{MT}} = \left(\frac{2b^2p - b^2c_1 - 4bpc_1 + 2bc_1^2 + 2pc_1^2 - c_1^3 - bqc_2 + qc_1c_2 + bc_2^2 + pc_2^2 - c_1c_2^2}{2((b - c_1)^2 + c_2^2)}, -\frac{c_2(bp - (b + p)c_1 + c_1^2 - qc_2 + c_2^2)}{2((b - c_1)^2 + c_2^2)}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{TP}} = \left(\frac{c_2(bq - qc_1 - bc_2 + pc_2)}{2((b - c_1)^2 + c_2^2)}, \frac{2b^2q - 4bqc_1 + 2qc_1^2 - b^2c_2 + bpc_2 + bc_1c_2 - pc_1c_2 + qc_2^2}{2((b - c_1)^2 + c_2^2)}\right)$$

Veamos que, en efecto , $\overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{TP}$.
Para ello, si efectuamos el producto escalar de ambos vectores resulta la siguiente expresión:

$$\overrightarrow{MT}.\overrightarrow{TP} = \frac{c_2(bqc_1 - qc_1^2 - bpc_2 + p^2c_2 + q^2c_2 - qc_2^2)}{4((b - c_1)^2 + c_2^2)}$$

Y como la expresión (I) es:

$$bqc_1 - qc_1^2 - bpc_2 + p^2c_2 + q^2c_2 - qc_2^2 = 0$$

Y así el producto escalar anterior resultará ser nulo.

Por tanto $\qquad \overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{TP} \qquad$ *cqd* ■

Corolario: La circunferencia de diámetro MP, siendo M punto medio del lado AC, corta a la Recta de Simson en dos puntos, S y T, siendo S la proyección de P sobre AC y el punto T, punto medio entre los dos puntos que son las proyecciones de P a los otros dos lados, BC y BA.