

Problema 734

4.- Elementos de un triángulo.

4.1.4)

Sea ABC un triángulo.

P un punto de la circunferencia circunscrita del arco BC que no contiene a A .

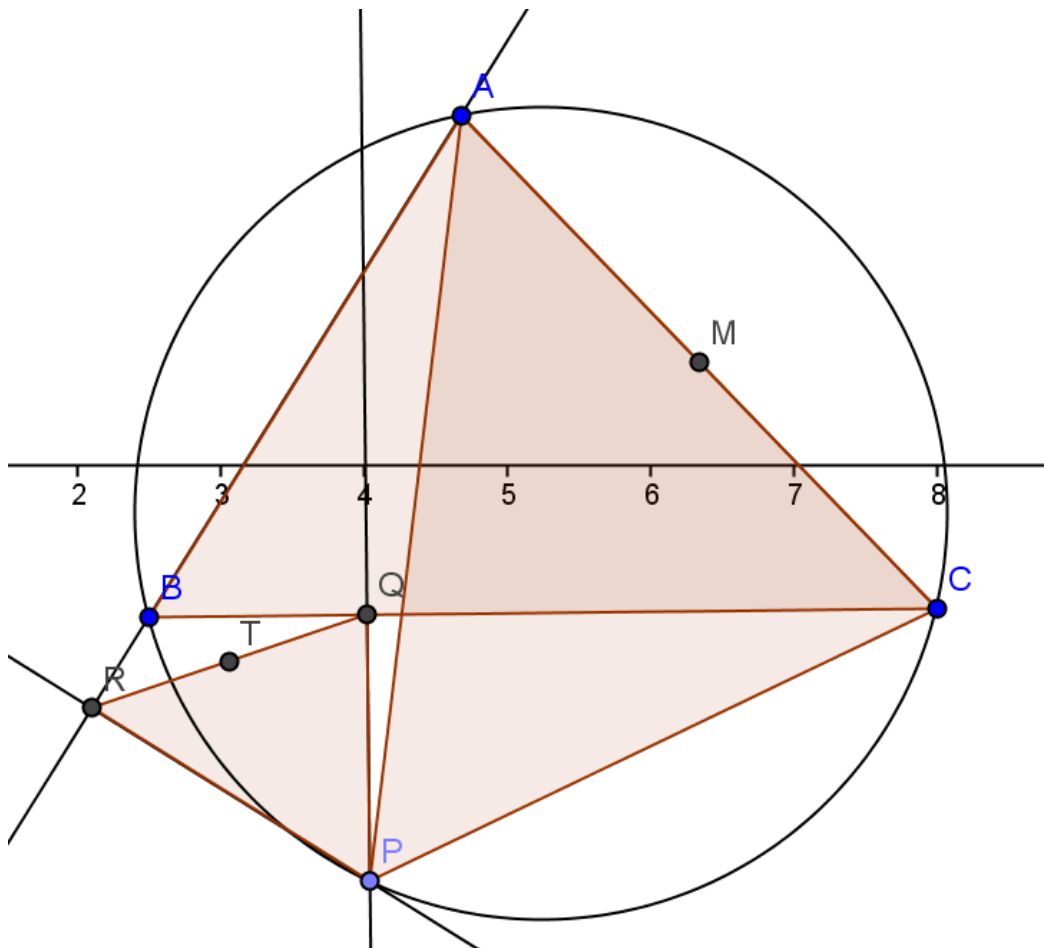
Sean Q la proyección de P sobre BC y R la proyección de P sobre AB .

Sea T el punto medio de QR y sea M el punto medio de AC .

Demostrar que el ángulo $\angle PTM$ es recto

Akopyan A.(2011):Geometry in Figures.

Solución del director.



Observemos que los triángulos PRQ y PAC son semejantes.

Sean α , β , y γ los ángulos de ABC , y sea $\angle BCP = \omega$.

Es $\angle APC = \beta$, $\angle ACP = \omega + \gamma$, $\angle PAC = \alpha - \omega$

El cuadrilátero PQBR es inscribible en una circunferencia.

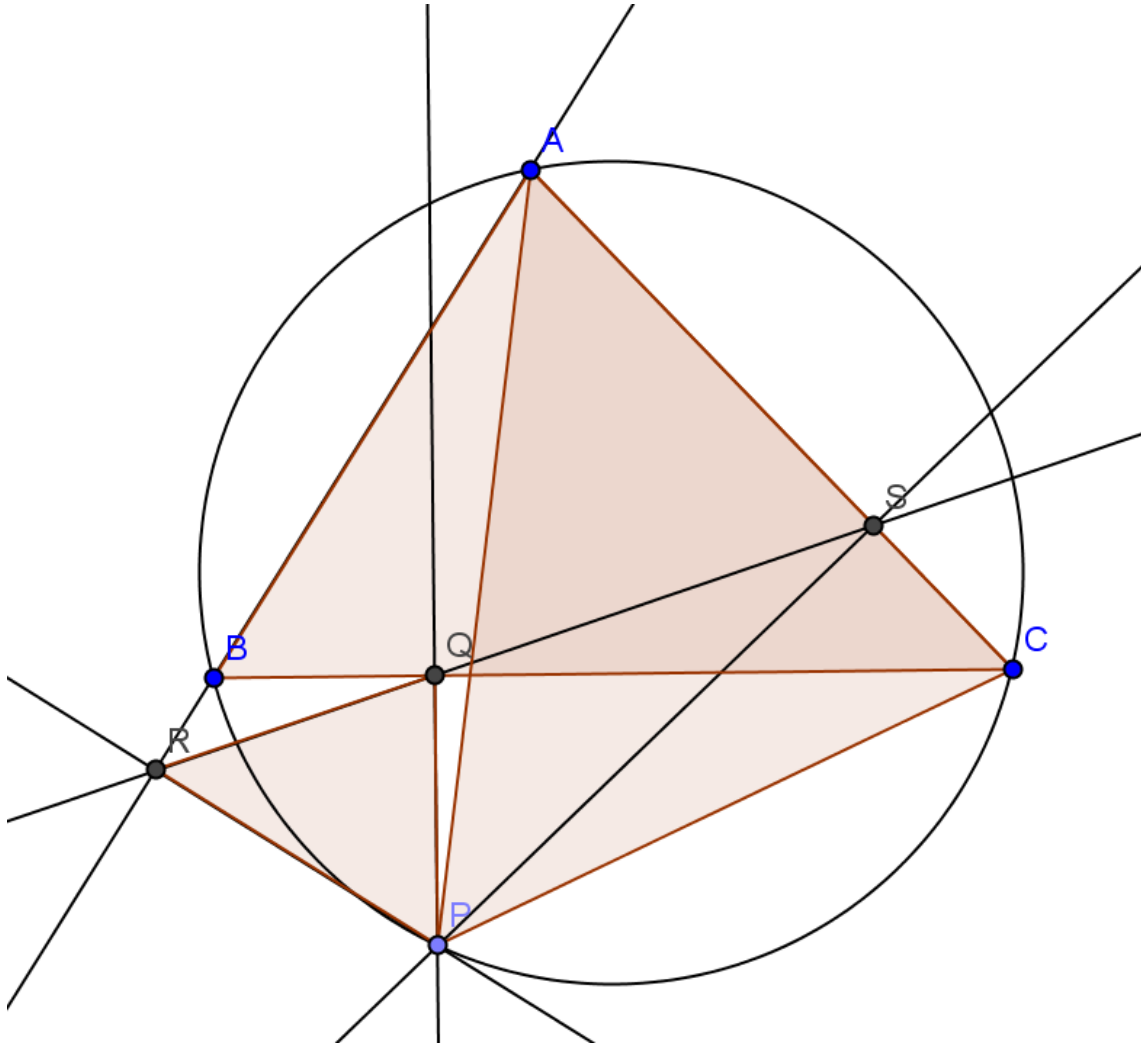
Luego $\angle PRQ = \angle PBQ = \angle PBC = \angle PAC = \alpha - \omega$ $\angle RPQ = 180^\circ - \angle RBQ = \beta$.

Así es $\angle RQP = \gamma + \omega$, y por tanto son semejantes.

Dado que PRQ y PAC tienen en común el vértice P, al ser semejantes se transforman mediante un giro de centro P, y ángulo $\angle CPQ = 90^\circ - \omega$ y homotecia de centro P y razón $\frac{PC}{PQ}$

De esta manera al ser las medianas homólogas en la transformación, es $\angle MPT = 90^\circ - \omega$

Consideremos ahora la proyección de P sobre AC. Sea S el punto de corte de la perpendicular desde P a AC.



Se trata de que RQS es la recta de Simson.

Busquemos el ángulo RSA.

Dado que $\angle PRQ = \alpha - \omega$, es $\angle SRA = 90^\circ - \alpha + \omega$, por lo que en el triángulo ASR es

$$\angle ASR = 90^\circ - \omega$$

Así el cuadrilátero SMTP es inscrito, y al ser MSP recto, lo es PTM, cqd.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.

Sevilla.