

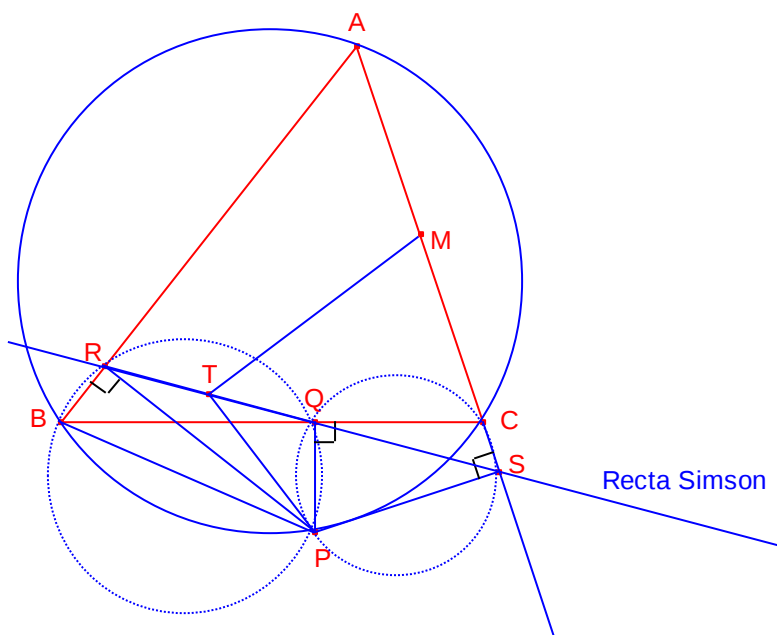
Problema 734

Siga $\triangle ABC$ un triangle.

Siga P un punt de la circumferència circumscriba de $\triangle ABC$ de l'arc $\widehat{BC}$ que no conté a A. Siguen Q la projecció de P sobre $\overline{BC}$ i R la projecció de P sobre $\overline{AB}$.

Siga T el punt mig de $\overline{QR}$ i siga M el punt mig de $\overline{AC}$.
Demostreu que l'angle $\angle PTM$ és recte.

Demostració:



La recta RQ és la recta Simson del punt P (de la circumferència circumscriba al triangle $\triangle ABC$) que passa pel punt projecció de P sobre el costat $\overline{AC}$.

Siga $\alpha = \angle BPR$.

El quadrilàter BRQP és inscriptible ja que $\angle BRP = \angle BQP = 90^\circ$.

Aleshores, $\angle BQR = \alpha$.

$\angle CQS = \angle BQR = \alpha$, $\angle RBQ = \angle RPQ = B$.

El quadrilàter PQCS és inscriptible ja que $\angle PQC = \angle PSC = 90^\circ$.

Aleshores, $\angle CPS = \angle CQS = \alpha$.

Aleshores, $\angle PCA = 90^\circ + \alpha$.

$\angle PQR = 90^\circ + \alpha$.

$\angle APC = B$.

Aleshores, els triangles $\triangle PQR$, $\triangle PCA$ són semblants.

Un gir de centre P i angle $\angle CPQ$ superposa els dos triangles.

Aleshores:

$\angle MPT = \angle CPQ$.

$\frac{PT}{PM} = \frac{PQ}{PC}$.

Aleshores, els triangles $\triangle PCA$, $\triangle PMT$ són semblants, per tant:

$\angle PTM = \angle PQC = 90^\circ$.