

Problema 734

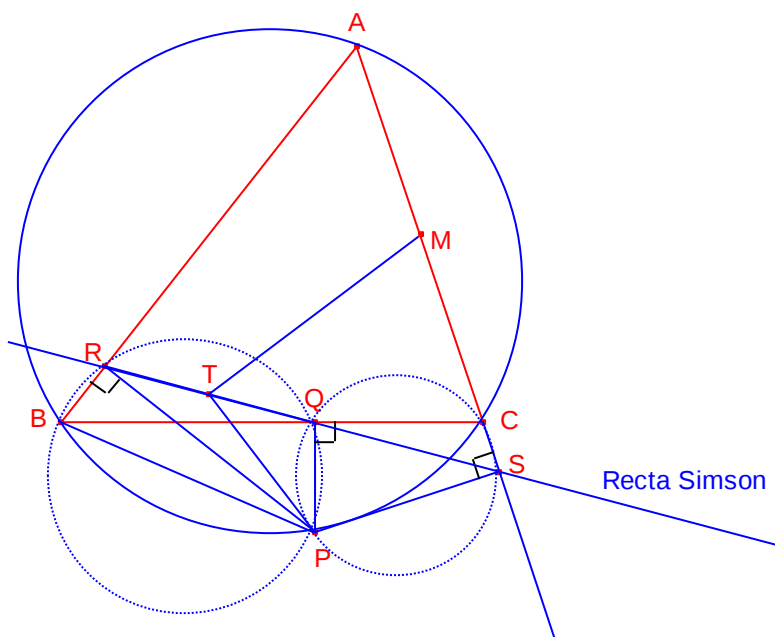
Sea $\triangle ABC$ un triángulo.

Sea P un punto de la circunferencia circunscrita de $\triangle ABC$ del arco $\widehat{BC}$ que no contiene a A . Sean Q la proyección de P sobre $\overline{BC}$ y R la proyección de P sobre $\overline{AB}$.

Sea T el punto medio de $\overline{QR}$ i sea M el punto medio de $\overline{AC}$.

Demostrar que el ángulo $\angle PTM$ es recto.

Demostración:



La recta RQ es la recta Simson del punto P (de la circunferencia circunscrita al triángulo $\triangle ABC$) que pasa por el punto proyección de P sobre el lado $\overline{AC}$.

Sea $\alpha = \angle BPR$.

El cuadrilátero $BRQP$ es inscriptible ya que $\angle BRP = \angle BQP = 90^\circ$.

Entonces, $\angle BQR = \alpha$.

$\angle CQS = \angle BQR = \alpha$, $\angle RBQ = \angle RPQ = B$.

El cuadrilátero $PQCS$ es inscriptible ja que $\angle PQC = \angle PSC = 90^\circ$.

Entonces, $\angle CPS = \angle CQS = \alpha$.

Entonces, $\angle PCA = 90^\circ + \alpha$.

$\angle PQR = 90^\circ + \alpha$.

$\angle APC = B$.

Entonces, los triángulos $\triangle PQR$, $\triangle PCA$ son semejantes.

Un giro de centro P y ángulo $\angle CPQ$ superpone los dos triángulos.

Entonces:

$\angle MPT = \angle CPQ$.

$\frac{PT}{PM} = \frac{PQ}{PC}$.

Entonces, los triángulos $\triangle PCA$, $\triangle PMT$ son semejantes, por tanto:

$\angle PTM = \angle PQC = 90^\circ$.