Problema 735

Sea ABC un triángulo. Consideremos la circunferencia circunscrita. Sea G el baricentro de ABC.

Sea P un punto genérico de la misma. Tracemos las proyecciones perpendiculares R a AB, S a AC y T a BC. Sean U, el punto medio de RS, V el de RT y W el de ST.

Demostrar que los lugares geométricos de U, V y W cuando P recorre la circunferencia son elipses de centros X, Y, Z, puntos medios de las medianas.

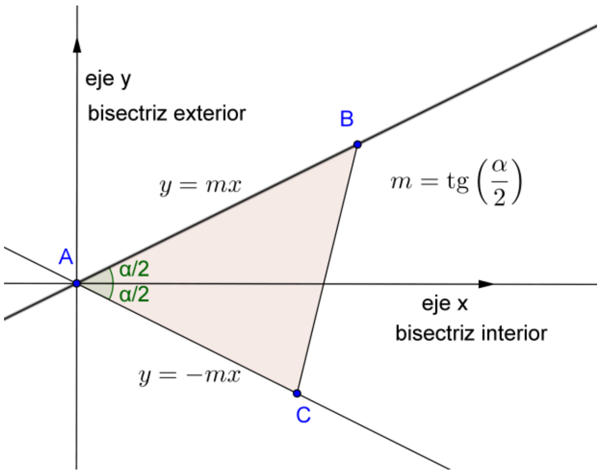
Barroso, R. (2015): Comunicación personal.

Solución de Manuel Gándara Pastrana, profesor interino en IES Fernando Blanco en Cee, A Coruña.

El problema se puede reducir a estudiar lo que sucede con AB, AC; las proyecciones perpendiculares R a AB, S a AC de un punto genérico P; U el punto medio de RS. Se tendrá en cuenta también el punto medio de BC (pie de la mediana por A), el centro de la circunferencia circunscrita y el punto diametralmente opuesto a A. El mismo razonamiento servirá para los otros dos pares de lados y sus elipses correspondientes.

Si se toma como centro de referencia el punto A, y en el ángulo BAC la bisectriz interior como eje *x* y la bisectriz exterior como eje *y*. Los lados AB y AC están en las rectas

$y = mx$; $y = -mx$



respectivamente. Las rectas perpendiculares a estas por un punto P(a, b) son

$y = -\frac{1}{m}x + b + \frac{a}{m}$; $y = \frac{1}{m}x + b - \frac{a}{m}$

respectivamente. Los puntos de corte se obtienen resolviendo los sistemas de ecuaciones y son:

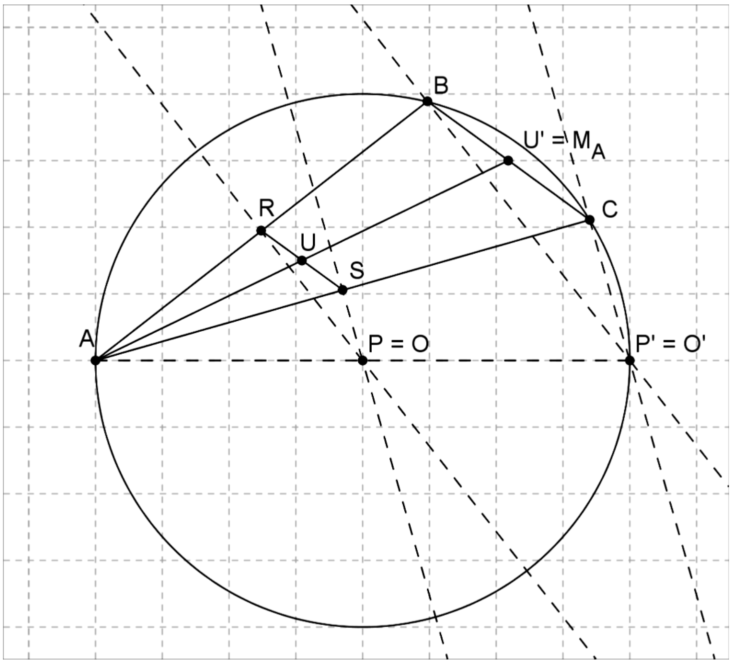
R$\left(\frac{mb+a}{m^2+1}, \frac{m^2b+ma}{m^2+1}\right)$; S$\left(\frac{a-mb}{m^2+1}, \frac{-ma+m^2b}{m^2+1}\right)$ Su punto medio es U$\left(\frac{a}{m^2+1}, \frac{m^2b}{m^2+1}\right)$

De esta forma, con este sistema de coordenadas la transformación descrita por el problema es la misma que la que pasa de (x, y) a $\left(\frac{x}{m^2+1}, \frac{m^2y}{m^2+1}\right)$. Esta aplicación es lineal (y si $m \neq 0$ es biyectiva).

Se puede descomponer como composición de una homotecia de razón $\frac{1}{m^2+1}$ seguida de una contracción o estiramiento en el sentido del eje y (dependiendo del valor de m). La primera lleva circunferencias en circunferencias, la segunda lleva circunferencias en elipses (o circunferencias si $m^2 = 1$). Además lleva el centro de la circunferencia en el centro de la elipse (o circunferencia) correspondiente. También se puede observar que lleva rectas que pasan por el origen (centro de la homotecia) en rectas que pasan por el origen, siendo este el único punto fijo de la aplicación

Queda ver ahora que esta aplicación lleva el centro O de la circunferencia circunscrita en el punto medio de la mediana M_A que pasa por A.

El centro O de la circunferencia circunscrita está a mitad de distancia de A que el punto O’ (diametralmente opuesto a A). Dado que AO’ es un diámetro de la circunferencia, O’B es perpendicular a AB. Análogamente O’C es perpendicular a AC. Por tanto la imagen de O’ por esta aplicación es el punto medio M_A de BC (pie de la mediana por A) .



Dado que la aplicación que pasa de P a U está dada por una aplicación lineal con origen el punto A, se puede conmutar con cualquier homotecia de centro A.

La homotecia de razón $\frac{1}{2}$ (y centro A) lleva el punto O’ en el punto O (estando A, O y O’ en la misma recta) y también lo hace con sus imágenes. Lleva al punto M_A en el punto U de forma que A, U y M_A están en la misma recta (mediana por A) y U está en el punto medio de esta mediana.